Kapitola 1

Náhodné jevy a jejich pravděpodobnost

Po prostudování této kapitoly byste měli být schopni:

- rozumět pojmu *náhodný jev* a umět jej vysvětlit na konkétních příkladech,
- rozumět vztahům mezi náhodnými jevy ($A = B$, $A \subset B$, neslučitelné jevy) a vysvětlit je na konkrétních příkladech,
- rozumět operacím s náhodnými jevy ($A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ a použít je v konkrétních příkladech,
- rozumět pojmům *jistý jev*, *nemožný jev*, *opačný jev* a umět je použít v konkrétních příkladech,
- rozumět definici pojmu *pravděpodobnost náhodného jevu* a umět ji vysvětlit na konkétních příkladech,
- rozumět pojmu *nezávislé náhodné jevy* a umět jej vysvětlit na vhodných příkladech,
- rozumět vzorcům pro *pravděpodobnost sjednocení náhodných jevů* a umět je použít v odpovídajících situacích,
- rozumět vzorci pro *pravděpodobnost průniku dvou nezávislých náhodných jevů* a umět jej použít v odpovídajících situacích.

1.1 Náhodné jevy

Náhodný pokus

Náhodným pokusem rozumíme každé pozorování nějakého náhodného děje, každé zaznamenání, změření či konstatování jeho výsledku. Stručně - před proběhnutím náhodného děje nevíme, jaký bude výsledek tohoto pokusu, ale po ukončení tohoto náhodného děje jsme schopni výsledek zaznamenat, změřit či konstatovat.

Náhodným pokusem je proto jeden hod mincí, výběr a spočtení zmetků v krabici výrobků, měření teploty vzduchu v danou hodinu atd.

Náhodný jev

Náhodný jev je každý možný výsledek náhodného pokusu.

Těchto výsledků může být větší množství. K jejich odlišení je často nazýváme jmény ve formě písmen abecedy - řekneme, že nastal jev A, jev B atd.

Příklad 1.1. Uvažujme náhodný pokus *hod kostkou* a sledujme, které číslo padne. Náhodné jevy mohou být například tyto výsledky hodu:

- Jev A ... nastane, když padne číslo 3 ———— $A = \{3\}$
- Jev B ... nastane, když padne sudé číslo ———— $B = \{2, 4, 6\}$
- Jev C ... nastane, když padne číslo dělitelné dvěma nebo třemi ———— $C = \{2, 3, 4, 6\}$
- Jev D ... nastane, když padnou čísla $2, 3, 4$ ———— $D = \{2, 3, 4\}$

Elementární jev

Elementární jevy jsou nejjednodušší výsledky náhodného pokusu, které se nedají složit z žádných jiných jevů. Množinu všech elementárních jevů budeme nazývat *prostorem elementárních jevů* a značit jej symbolem Ω.

V případě, kdy je náhodným pokusem *hod kostkou*, jsou elementární tyto jevy: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, $D = \{4\}$, $E = \{5\}$, $F = \{6\}$ a prostorem všech elementárních jevů je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1.1.1 Úlohy k řešení

Příklad 1.2. Uveďte alespoň tři různé příklady náhodných pokusů.

Příklad 1.3. Je dán náhodný pokus spočívající v náhodném výběru jedné osoby z množiny všech studentů FSE UJEP. Uveďte alespoň tři různé náhodné jevy k tomuto náhodnému pokusu.

Příklad 1.4. Uvažujme náhodný pokus spočívající v náhodném výběru jedné karty z balíčku 32 karet. Uveďte alespoň tři různé náhodné jevy k tomuto náhodnému pokusu.

Příklad 1.5. Uvažujme náhodný pokus v hodu 2 mincemi. Popište prostor elementárních jevů.

1.2 Vlastnosti náhodných jevů a operace s náhodnými jevy

- Symbolem $A \subset B$ značíme, že nastane-li jev A, nastane nutně i jev B. Říkáme, že jev A má za následek jev B.
  - V Příkladu 1.1 platí $B \subset C$. Jev B: *Padlo sudé číslo* má za následek jev C: *Padlo číslo dělitelné dvěma nebo třemi.* Množinově $\{2, 4, 6\} \subset \{2, 3, 4, 6\}$.
- Symbolem $A = B$ značíme, že **jevy A a B jsou si rovny**, tj. jev A nastane vždy, když nastane jev B a nikdy jindy.
- Řekneme, že nastalo **sjednocení jevů** A a B (značíme $A \cup B$) právě tehdy, nastal-li jev A nebo jev B, nebo oba současně.
- Řekneme, že nastal **průnik jevů** A a B (značíme $A \cap B$) právě tehdy, nastal-li jev A a současně nastal jev B.
- Jev **rozdíl jev**ů A a B (značíme $A \backslash B$) nastane právě tehdy, nastane-li jev A a nenastane jev B.
- Jev $\overline{A}$, tzv. **opačný** (doplňkový, komplementární) **jev** k jevu A, nastane právě tehdy, nenastane-li jev A.
- Náhodný jev, který nastane vždy, se nazývá **jev jistý**. Označuje se také Ω a je vlastně sjednocením všech jevů, které mohou nastat.
- Jev, který nenastane nikdy, nazýváme **jev nemožný** a značíme ho $\emptyset$.
- Jsou-li A a B takové jevy, že $A \cap B = \emptyset$, nazýváme je **neslučitelné** (disjunktní) **jevy**. Neslučitelné jevy tedy nemohou nastat současně.

Příklad 1.6. Nově vyvinutý výrobek je podroben třem různým zkouškám. Jev A nastane tehdy, když náhodně vybraný výrobek ze zkušební série obstojí v první zkoušce, jev B nastane tehdy, když náhodně vybraný výrobek obstojí ve druhé zkoušce a jev C nastane, pokud náhodně vybraný výrobek vyhoví ve třetí zkoušce. Jak v množinové symbolice vyjádříme to, že náhodně vybraný výrobek obstojí:

a) jen v první zkoušce,

b) v první a ve druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce,

c) ve všech třech zkouškách,

d) alespoň v jedné zkoušce,

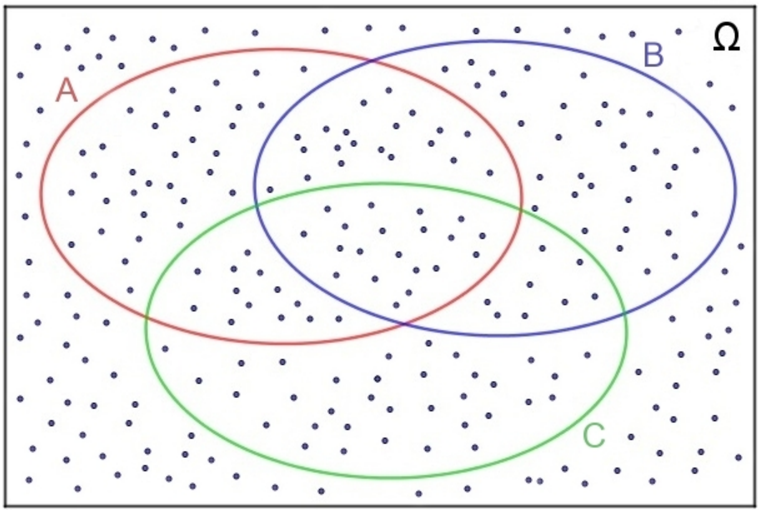
e) alespoň ve dvou zkouškách,

f) právě v jedné zkoušce,

g) právě ve dvou zkouškách,

h) maximálně dvakrát?

Řešení: Uvedenou situaci lze graficky znázornit na Obrázku 1.1. Uvnitř černého obdélníku (označení Ω) jsou černé tečky, které symbolicky představují testované výrobky. Každý z nich má svou kvalitu, podle které



Obrázek 1.1: Testování výrobků

vyhoví, resp. nevyhoví jednotlivým zkouškám. Náhodným pokusem je zde výběr výrobku. Podle toho, o jak kvalitní výrobek se jedná, budou tyto výrobky vyhovovat jednotlivým testům a podle toho budou nastávat jednotlivé jevy A, B a C. Výrobky, které vyhoví v první zkoušce, jsou na obrázku zahrnuty v červeném oválu (množina A - prvky, při jejichž výběru nastane jev A). Analogicky - výrobky, které vyhoví ve druhé zkoušce, představují tečky, které se nacházejí v modrém oválu (množina B - prvky, při jejichž výběru nastane jev B) a výrobky, které vyhoví ve třetí zkoušce, představují tečky, které se nacházejí v zeleném oválu (množina C - prvky, při jejichž výběru nastane jev C).

Z obrázku lze vyčíst, které výrobky například vyhoví pouze v první zkoušce, které vyhoví ve všech třech zkouškách, které vyhoví pouze první a druhé zkoušce atd. Pokuste se na obrázku určit, které body vyhovují uvedeným případům a) až h).

a) Jestliže výrobek obstojí pouze v první zkoušce, znamená to: obstojí v první zkoušce, tj. nastane jev A. Zároveň neobstojí ve druhé zkoušce, tj. nenastane jev B, tj. nastane opačný jev k jevu B, tj. nastane jev $\overline{B}$. Zároveň výrobek nevyhoví ve třetí zkoušce, tedy nenastane jev C, tj. nastane jev $\overline{C}$. Jevy A, $\overline{B}$ a $\overline{C}$ nastávají současně, proto jev, kdy výrobek obstojí pouze v první zkoušce množinově vyjádříme zápisem $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

b) Víme, že vybraný výrobek obstojí v první a ve druhé zkoušce, tj. nastane jev A a B, ale neobstojí ve třetí zkoušce, tj. nastane jev $\overline{C}$. Všechny tyto jevy přitom nastanou současně, jedná se tedy o průnik těchto jevů $A \cap B \cap \overline{C}$.

c) Pokud vybraný výrobek vyhoví ve všech třech zkouškách, znamená to, že vyhověl v první zkoušce - nastal je A, zároveň vyhoví ve druhé zkoušce - nastal jev B a zároveň vyhověl ve třetí zkoušce - nastal jev C. Protože jevy nastanou současně, jedná se o jejich průnik $A \cap B \cap C$.

d) Výrok *výrobek obstojí alespoň v jedné zkoušce* znamená totéž, jako že výrobek obstojí v první zkoušce (bez ohledu na to jak (ne)dopadly ostatní zkoušky) - nastane jev A, nebo ve druhé zkoušce (bez ohledu na to jak (ne)dopadly ostatní zkoušky) - nastane jev B, nebo ve třetí zkoušce (bez ohledu na to jak (ne)dopadly ostatní zkoušky) - nastane jev C. Stačí, aby nastala alespoň jedna z uvedených situací a bude pravda, že výrobek vyhověl v alespoň jedné zkoušce. Tedy výrobek obstál alespoň v jedné zkoušce, pokud nastane alespoň jeden z jevů A, B, resp. C. Jedná se tedy o sjednocení jevů - množinově $A \cup B \cup C$.

e) Výrok *výrobek obstojí alespoň ve dvou zkouškách* znamená totéž, jako že výrobek obstojí v první a druhé zkoušce (bez ohledu na to jak (ne)dopadla třetí zkouška) - nastane jev $A \cap B$, nebo v první a třetí zkoušce (bez ohledu na to jak (ne)dopadla druhá zkouška) - nastane jev $A \cap C$, nebo ve druhé a třetí zkoušce (bez ohledu na to jak (ne)dopadla první zkouška) - nastane jev $B \cap C$. Stačí, aby nastala alespoň jedna z uvedených situací a bude pravda, že výrobek vyhověl alespoň ve dvou zkouškách. Tedy výrobek obstál alespoň ve dvou zkouškách, pokud nastane alespoň jeden z jevů $A \cap B$, $A \cap C$, resp. $B \cap C$. Jedná se o sjednocení uvedených jevů - množinově $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

f) Výrobek obstojí právě v jedné zkoušce, když vyhoví v první zkoušce a zároveň nevyhoví ve druhé a třetí zkoušce - tj. nastane jev $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, nebo vyhoví ve druhé zkoušce a zároveň nevyhoví v první a třetí zkoušce - tj. nastane jev $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, nebo vyhoví ve třetí zkoušce a zároveň nevyhoví v první a druhé zkoušce - tj. nastane jev $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$. Uvažovaný jev nastane při výskytu kterékoliv z popsaných situací - jedná se tedy o jejich sjednocení. Množinový zápis zní $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

g) Výrobek obstojí právě ve dvou zkouškách, když vyhoví v první a druhé zkoušce a zároveň nevyhoví ve třetí zkoušce - tj. nastane jev $A \cap B \cap \overline{C}$, nebo vyhoví v první a třetí zkoušce a zároveň nevyhoví ve druhé zkoušce - tj. nastane jev $A \cap \overline{B} \cap C$, nebo vyhoví ve druhé a třetí zkoušce a zároveň nevyhoví v první zkoušce - tj. nastane jev $\overline{A} \cap B \cap C$. Uvažovaný jev nastane při výskytu kterékoliv z popsaných situací - jedná se tedy o jejich sjednocení. Množinový zápis zní $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$.

h) Výrobek v testech obstojí nejvýše dvakrát, pokud neobstojí v žádném testu, nebo obstojí právě v jednom testu, nebo obstojí právě ve dvou testech. Sloučením (tj. sjednocením) všech těchto případů bychom dostali žádané vyjádření. Jednodušší však bude následující pohled. Pokud výrobek obstojí nejvýše ve dvou testech - jak vypadá příslušný opačný jev? Tomu odpovídá situace, že výrobek obstál ve všech třech testech, tj jevu $A \cap B \cap C$. Opačný jev má tedy vyjádření $\overline{A \cap B \cap C}$, což je výraz, který jsme měli určit.

1.3 Definice pravděpodobnosti náhodného jevu

1.3.1 Pravděpodobnost náhodného pokusu

Pro náhodný jev A definujeme jeho pravděpodobnost vztahem

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \tag{1.1}$$

kde $m(A)$, resp. $m(\Omega)$ znamená mohutnost množiny A, resp. Ω.

Výše uvedená definice potřebuje několik poznámek. Jedná se o tzv. klasickou definici pravděpodobnosti. Lze ji použít v případě, že každý z prvků množiny Ω má stejnou šanci, že nastane - což nemusí být vždy splněno. V případě množin s konečným počtem prvků většinou mohutnost množiny odpovídá počtu prvků této množiny, viz Příklad 1.7. Nicméně, lze se setkat i s úlohami, ve kterých jak množina A, tak množina Ω mají nekonečně mnoho prvků, a pak mohutností množiny rozumíme její jinou míru, viz např. Příklad 1.8 .

Příklad 1.7. Náhodným pokusem je náhodný výběr jedné osoby při zasedání poslanecké sněmovny ČR (předpokládejme, že nikdo z poslanců a poslankyň nechybí). Náhodný jev A nastane tehdy, je-li touto osobou žena. Jaká je pravděpodobnost jevu A?

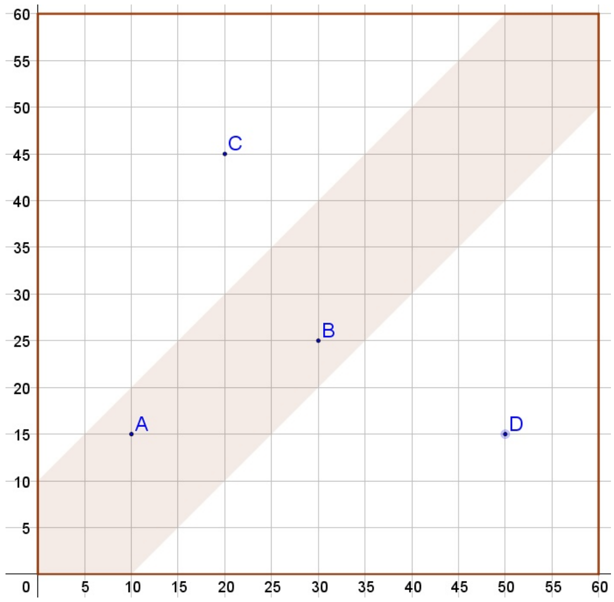
Řešení: Víme, že poslanecká sněmovna ČR má celkem 200 členů, tj. $m(\Omega) = 200$, z nichž je 45 žen (stav v březnu 2020), tj. $m(A) = 45$. Dle definice je

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{45}{200} = 0,225.$$

Pravděpodobnost výběru ženy při výběru z řad členů poslanecké sněmovny je rovna $0,225$.

Příklad 1.8. Adam s Evou se domluvili, že se spolu setkají zítra u kina Hraničář, a to v době mezi 12. a 13. hodinou. Každý z nich bude na druhého čekat 10 minut, pokud ten druhý do té doby nepřijde, první odchází a nesetkají se. Jaká je pravděpodobnost, že se zítra za uvedených podmínek setkají?

Řešení: Při popisu situace si můžeme pomoci Obrázkem 1.2. Dobu mezi 12. a 13. hodinou jsme si rozdělili na 60 minut. V zobrazeném grafu si pomocí bodů (viz bod A, bod B, bod C, bod D) znázorníme okamžiky



Obrázek 1.2: Ilustrační obrázek k Příkladu 1.8

příchodu obou partnerů tak, že x-ová, resp. y-ová souřadnice každého bodu představuje čas příchodu Adama, resp. Evy. Z obrázku je zřejmé, že bod A představuje situaci, ve které Adam přišel ve 12:10 a Eva ve 12:15. Eva přišla 5 minut po Adamovi, ten na ni v rámci desetiminutové čekací doby počkal, a proto se oba setkali. Oproti tomu bod D znázorňuje situaci, ve které Eva přišla ve 12:15, čekala 10 minut a pak odešla aniž by potkala Adama, který se dostavil ve 12:50. Bod D tedy představuje situaci, kdy se oba partneři nesetkali. Stejně tak můžeme říci, že bod B je situace, ve které setkání proběhlo a v bodě C k setkání nedošlo (proč?).

Každý bod ze zobrazeného čtverce představuje jednu možnost příchodu každého z partnerů. Některé body přitom odpovídají situaci, kdy se Adam s Evou setkali, některé (zbývající) body představují stav, kdy se oba partněři minuli. „Úhlopříčný pruh“ na obrázku obsahuje ty body, které znázorňují situaci, ve které se Adam s Evou potkají. Body mimo tento pruh symbolizují stav, kdy se nesetkají.

Zadání úlohy tak můžeme převést do abstraktnější roviny, kdy náhodným pokusem je výběr jednoho bodu ze zobrazeného čtverce (tento bod představuje náhodné příchody obou partnerů v průběhu jedné hodiny). Jev A nastane, leží-li tento bod ve zvýrazněném úhlopříčném pruhu. Prostorem všech elementárních jevů Ω je zde množina všech bodů čtverce, jev A symbolizují body uvnitř zvýrazněného pruhu. Jak Ω, tak A má nekonečně mnoho prvků, proto není vhodné použít jako mohutnost (velikost) obou množin počet jejich prvků. Namísto toho lze jako jejich velikost uvažovat obsah plochy, kterou obě množiny vyplňují - v tomto případě je to vhodná míra velikosti obou množin.

Množina Ω vyplňuje čtverec, jehož obsah snadno určíme - je $m(\Omega) = 60 \cdot 60 = 3\,600$. Množina A vyplňuje šestiúhelník, jehož obsah lze určit několika způsoby. V tomto případě zřejmě nejsnažší (tj. hodně elementární) způsob spočívá v určení počtu vybarvených čtverců o rozměrech 5×5 jednotek. Je zde 34 plně vybarvených čtverců a 20 z poloviny vybarvených čtverců, které odpovídají 10 plně vybarveným čtvercům, tj. dohromady 44 čtverců, každý z nich o obsahu $5 \cdot 5 = 25$. Pro velikost množiny A tak platí $m(A) = 44 \cdot 25 = 1\,100$. Jiný (obecnější) způsob určení obsahu vyznačené plochy může spočívat např. v rozdělení šestiúhelníku na dva shodné lichoběžníky a určení obsahu těchto lichoběžníků odečtením ploch dvou trojúhelníků.

Pravděpodobnost jevu A je rovna

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1100}{3600} = 0,30\overline{5}.$$

Pravděpodobnost, že se Adam s Evou setkají za podmínek uvedených v zadání úlohy činí $0,30\overline{5}$.

1.3.2 Operace s náhodnými jevy

V následující části si ukážeme postup výpočtu pravděpodobnosti jevů pomocí klasické definice a rozšíříme jej na jevy, které vzniknou pomocí operací s náhodnými jevy. Mohutností množiny zde budeme rozumět počet prvků dané množiny.

Příklad 1.9. Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Dále jsou definovány následující náhodné jevy.

a) Jev A nastane, jestliže na kostce padne číslo 3.

b) Jev B nastane, jestliže na kostce padne sudé číslo.

c) Jev C nastane, jestliže na kostce padne číslo větší než 3.

Vypočtěte pravděpodobnosti jevů A, B a C a určete a interpretujte pravděpodobnosti jevů $\overline{C}$, $B \cap C$, $B \cup C$.

Výpočet $P(A)$

$$\begin{aligned} A &= \{3\} \\ \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ m(A) &= 1 \\ m(\Omega) &= 6 \\ P(A) &= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost jevu A je rovna $\frac{1}{6}$.

Výpočet $P(B)$

$$\begin{aligned} B &= \{2, 4, 6\} \\ \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ m(B) &= 3 \\ m(\Omega) &= 6 \\ P(B) &= \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost jevu B je rovna $\frac{1}{2}$.

Výpočet $P(C)$

$$\begin{aligned} C &= \{4, 5, 6\} \\ \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ m(C) &= 3 \\ m(\Omega) &= 6 \\ P(C) &= \frac{m(C)}{m(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost jevu C je rovna $\frac{1}{2}$.

Výpočet $P(\overline{C})$

$$\begin{aligned} C &= \{4, 5, 6\} \\ \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \overline{C} &= \Omega \backslash C = \{1, 2, 3\} \\ m(\overline{C}) &= 3,\ m(\Omega) = 6 \\ P(\overline{C}) &= \frac{m(\overline{C})}{m(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(Výsledek a jeho interpretace:) Pravděpodobnost jevu, že nepadne číslo větší než tři, je rovna $\frac{1}{2}$.

Výpočet $P(B \cap C)$

$$\begin{aligned} B &= \{2, 4, 6\} \\ C &= \{4, 5, 6\} \\ B \cap C &= \{4, 6\} \\ m(B \cap C) &= 2,\ m(\Omega) = 6 \\ P(B \cap C) &= \frac{m(B \cap C)}{m(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Výsledek a jeho interpretace
Pravděpodobnost padnutí sudého čísla většího než tři (tj. případu kdy nastane jev B a současně jev C) je rovna $\frac{1}{3}$.

Výpočet $P(B \cup C)$

$$\begin{aligned} B &= \{2, 4, 6\} \\ C &= \{4, 5, 6\} \\ B \cup C &= \{2, 4, 5, 6\} \\ m(B \cup C) &= 4, \ m(\Omega) = 6 \\ P(B \cup C) &= \frac{m(B \cup C)}{m(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Výsledek a jeho interpretace
Pravděpodobnost padnutí buď sudého čísla nebo čísla většího než tři (tj. případu, kdy nastane alespoň jeden z jevů B, resp. C) je rovna $\frac{2}{3}$.

1.4 Pravděpodobnost průniku náhodných jevů

V této části se budeme věnovat obecnějším úvahám o pravděpodobnostech. Opustíme způsob výpočtu spočívající ve výčtu všech elementárních jevů, které vedou k nastání stanovených jevů a zaměříme se na obecná pravidla, která platí pro počítání s pravděpodobnostmi jevů a jejich průniku, sjednocení, resp. rozdílu.

Věta **??** se někdy používá k definici nezávislosti jevů, někdy se používá k výpočtu pravděpodobnosti jevů, o kterých víme, že jsou nezávislé. Zde si vysvětlíme, co rozumíme pojmem nezávislé jevy a pak si uvedeme, kterak počítat pravděpodobnost jejich průniku, tj. pravděpodobnost toho, že oba jevy nastanou současně.

Předpokládejme, že jsou dány jevy A a B, přičemž známe pravděpodobnosti obou těchto jevů. Jevy A a B lze považovat za nezávislé, jestliže znalost o tom, zda nastal jev A, nevede k změně pravděpodobnosti jevu B a naopak, znalost o tom, zda nastal jev B, nevede ke změně pravděpodobnosti jevu A. Pro ukázku uveďme dva ilustrační příklady.

Příklad 1.10. Budeme vycházet ze zadání Příkladu 1.8, kde náhodným pokusem bylo hození kostkou a byly definovány jevy A, B a C. Připomeňme, že $B = \{2, 4, 6\}$, $P(B) = 1/2$ a $C = \{4, 5, 6\}$, $P(C) = 1/2$. Nyní si představte situaci, že někdo hodí kostkou. Vy nevíte, jaké číslo na kostce padlo. Pravděpodobnost hodu sudého čísla je 1/2, pravděpodobnost hodu čísla většího než 3 je 1/2. Nyní Vám osoba házející kostkou řekla, že při hodu kostkou nastal jev B, tj. že padlo sudé číslo. Jaká je nyní pravděpodobnost, že nastal jev C, tj. že padlo číslo větší než 3? Nyní již víme, že mohlo padnout pouze jedno z čísel 2, 4, 6. Proto je $\Omega = \{2, 4, 6\}$. Z těchto případů jsou větší než tři pouze čísla 4 a 6, tedy $C = \{4, 6\}$. Pravděpodobnost toho, že padlo číslo větší než tři, při znalosti toho, že padlo sudé číslo, je rovna 2/3 a tedy znalost, že nastal jev B změnila pravděpodobnost jevu C. Jevy proto nejsou nezávislé, jsou tzv. závislé.

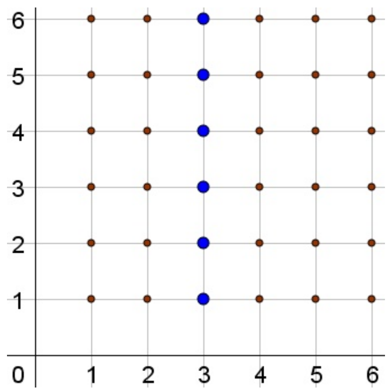
Příklad 1.11. Náhodný pokus spočívá v hodu dvěma kostkami - pro jejich rozlišení budeme uvažovat hod modrou a červenou kostkou. Jev A nastane, jestliže na modré kostce padne číslo 3. Jev B nastane, jestliže na červené kostce padne číslo 4. Situaci budeme ilustrovat na Obrázku 1.3. Na něm můžeme vidět 36 bodů (no, spíše puntíků), z nichž x-ová souřadnice každého bodu odpovídá číslu, které padlo na modré kostce, y-ová souřadnice každého bodu odpovídá číslu, které padlo na červené kostce. Každý bod tak odpovídá jednomu konkrétnímu výsledku hodu dvěma kostkami. Pokud například na modré kostce padne číslo 2 a na červené kostce padne číslo 5, dostáváme bod o souřadnicích (2,5). Jev A nastane v těchto případech

$$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}.$$

Je $m(A) = 6$, $m(\Omega) = 36$, proto

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Na Obrázku 1.3 jsou případy, kdy nastal jev A, zobrazeny modrými body. Je zřejmé, že modré puntíky tvoří šestinu z celkového počtu, což potvrzuje výpočet $P(A)$.



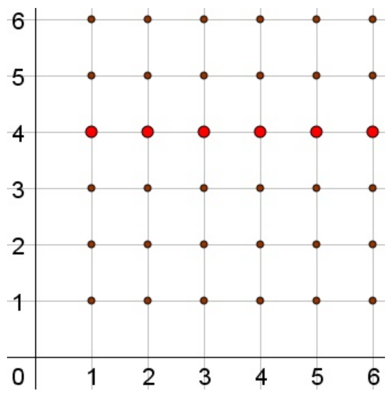
Obrázek 1.3: Ilustrace hodu dvěma kostkami

Analogicky, pro jev B platí

$$B = \{(1,4),\ (2,4),\ (3,4),\ (4,4),\ (5,4),\ (6,4)\}.$$

Je $m(B) = 6$, $m(\Omega) = 36$, proto

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$



Obrázek 1.4: Vyznačení jevu B

Nyní se někdo podíval na hozené kostky a řekl, že nastal jev A, tj. na modré kostce padlo číslo tři. Jaká je nyní pravděpodobnost, že nastal jev B, tj. že při tomtéž hodu padlo na červené kostce číslo čtyři? Nyní již množinu Ω tvoří pouze šest možností $\Omega = \{(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6)\}$, viz Obrázek 1.5. Z uvedených možností vede k jevu B jediná, a to $(3,4)$. Pokud nastal jev A, je $m(\Omega) = 6$, $m(B) = 1$, proto

$$P(B) = \frac{1}{6}.$$

Viz Obrázek 1.5. Vidíme, že pravděpodobnost jevu B je stejná bez ohledu na to, zda máme informaci o tom, že nastal či nenastal jev A. Jevy A a B jsou proto nezávislé. Nyní by již měla být zřejmá idea pojmu závislé, resp. nezávislé jevy a můžeme přikročit k následující větě.

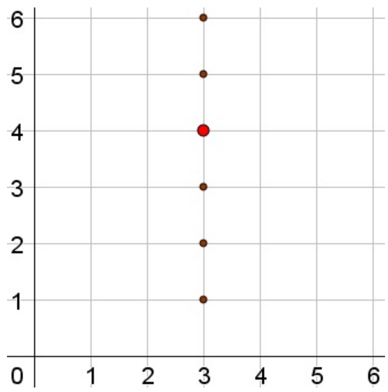
Věta 1.4.1. *Jsou-li A a B nezávislé jevy, potom platí rovnost*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1.2}$$

Uvedená věta říká, jak určit pravděpodobnost, že dva jevy nastanou současně za předpokladu, že jsou tyto jevy vzájemně nezávislé. Poznamenejme ještě, že v praxi často není hned zřejmé, zda jevy jsou, či nejsou nezávislé a je nutné toto ověřit měřením. Při tomto měření v podstatě ověřujeme, zda platí vztah (1.2).

Ukažme si platnost věty 1.4.1 na již probraných příkladech. Uvažujme jevy B a C z Příkladu 1.9. Víme (viz Příklad 1.10), že jevy B a C jsou závislé. Dále jsme již vypočítali (viz Příklad 1.9), že platí:

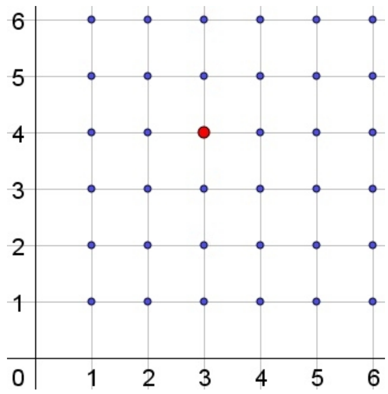
$$P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2} \quad P(B \cap C) = \frac{1}{3}.$$



Obrázek 1.5: Vyznačení jevu B pokud nastal jev A

Všimněte si, že
$$P(B \cap C) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C).$$
Pravděpodobnost průniku jevů v tomto případě **není** rovna součinu pravděpodobností těchto jevů, neboť jevy nejsou vzájemně nezávislé. Pokud byste tedy použili vztah (1.2) v případě závislých jevů, dostanete špatný výsledek.

Nyní uvažujme jevy A a B z Příkladu 1.11. Jev $A \cap B$ představuje jev, při kterém nastane jev A a současně nastane i jev B, tj. hodíme dvěma kostkami - na modré kostce padne číslo tři a současně na červené kostce padne číslo čtyři, tj. průnikem obou jevů je jediný případ $(3, 4)$ z celkového počtu všech 36 možných výsledků, viz Obrázek 1.6. Proto je $m(A \cap B) = 1$ a $m(\Omega) = 36$ a platí:



Obrázek 1.6: Grafické vyjádření $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = \frac{m(A \cap B)}{m(\Omega)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B).$$

Pravděpodobnost průniku jevů v tomto případě **je** rovna součinu pravděpodobností těchto jevů, neboť z Příkladu 1.11 víme, že oba jevy jsou vzájemně nezávislé.

Můžeme se ptát, jak se vypočítá pravděpodobnost průniku jevů v případě, kdy jsou oba jevy závislé. Takový vzorec existuje, nicméně k jeho vyslovení budeme potřebovat pojem podmíněné pravděpodobnosti, který dosud nemáme zavedený.

1.5 Pravděpodobnost sjednocení náhodných jevů

Níže vyslovíme tři věty, které ukazují jak počítat pravděpodobnost, že nastal alespoň jeden z uvažovaných jevů, tj. pravděpodobnost sjednocení náhodných jevů.

Věta 1.5.1. *Pro libovolné jevy A a B platí vztah*
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.3}$$

Speciálně, jsou-li A a B nezávislé jevy, potom je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \tag{1.4}$$

Speciálně, jsou-li A a B neslučitelné jevy, potom je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.5}$$

Dále následuje věta, která je přímým důsledkem rovnice (1.5.2) a faktu, že jevy A a $\overline{A}$ jsou neslučitelné a přitom jejich sjednocení tvoří množinu Ω.

Věta 1.5.2. *Pro pravděpodobnosti jevů A a $\overline{A}$ platí následující vzorec:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.6}$$

Příklad 1.12. Vypočtěte pravděpodobnosti, že při hodu dvěma hracími kostkami padne

a) na obou kostkách šestka,

b) alespoň jedna šestka,

c) právě jedna šestka,

d) ani jedna šestka.

Řešení: Nejprve obecný komentář. Náhodným pokusem je hod dvěma kostkami, např. modrou a červenou.

- Náhodný jev A nastane, pokud na první (modré) kostce padne šestka.
- Náhodný jev B nastane, pokud na druhé (červené) kostce padne šestka.

Již víme, viz Příklad 1.11, že jevy A a B jsou navzájem nezávislé a platí:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}.$$

Nyní následuje řešení konkrétních bodů.

a) Na obou kostkách padne šestka právě tehdy, když nastane jev A a současně nastane jev B. Jedná se o průnik jevů A a B a vzhledem k nezávislosti obou jevů lze psát

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

b) K uvedenému případu dojde, když nastane alespoň jeden z jevů A a B. Jedná se tedy o sjednocení jevů A a B a vzhledem k nezávislosti obou jevů lze psát

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

c) Tvrzení znamená, že buď padne šestka na první kostce a na druhé nepadne, nebo na první kostce nepadne šestka a na druhé ano.

$$\begin{aligned} P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] &= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) - P(\overline{A} \cap B \cap A \cap \overline{B}) = \\ &= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(\emptyset) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} - 0 = \frac{10}{36} \end{aligned}$$

Komentář k výpočtu: Jev $\overline{A} \cap B \cap A \cap \overline{B}$ je nemožný s nulovou pravděpodobností. Pokud např. počítáme průnik jevů A a $\overline{A}$, tak chceme, aby nastal jev A a současně jev opačný k jevu A, což není možné.

d) Na první kostce nastane jev $\overline{A}$ a současně na druhé kostce nastane jev $\overline{B}$. Proto je

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

Lze řešit i následujícím způsobem. Jev „žádná šestka“ je doplněk k jevu „alespoň jedna šestka“. Proto platí

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}.$$

Příklad 1.13. Přítomnost nežádoucích příměsí v mléčném výrobku se testuje pomocí dvou nezávislých zkoušek. První zkouška odhalí nežádoucí příměs s pravděpodobností $p_1 = 0,96$, druhá zkouška s pravděpodobností $p_2 = 0,98$. Jaká je pravděpodobnost, že nežádoucí příměs

a) odhalí alespoň jedna zkouška,

b) odhalí právě jedna z obou zkoušek,

c) neodhalí žádná zkouška?

Obecný komentář: Náhodným pokusem je testování výrobku pomocí dvou nezávislých zkoušek.

- Náhodný jev A nastane, pokud výrobek má nežádoucí příměs a tu odhalí první zkouška.
- Náhodný jev B nastane, pokud výrobek má nežádoucí příměs a tu odhalí druhá zkouška.

Ze zadání příkladu (zkoušky jsou na sobě nezávislé) víme, že jevy A a B jsou navzájem nezávislé a platí:

$$P(A) = 0,96, \quad P(B) = 0,98.$$

Nyní následuje řešení konkrétních bodů. *Řešení:*

a) Jev „alespoň jedna zkouška“ je sjednocením jevů A a B. Proto je

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ &= 0,96 + 0,98 - 0,96 \cdot 0,98 = 0,9992. \end{aligned}$$

b) Jev „právě jedna zkouška“ znamená, že nastane A a nenastane B, nebo nenastane A a nastane B. Proto je

$$\begin{aligned} P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] &= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) - P(\overline{A} \cap B \cap A \cap \overline{B}) = \\ &= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(\emptyset) = \\ &= 0,96 \cdot 0,02 + 0,98 \cdot 0,04 = 0,0584. \end{aligned}$$

c) Jev „žádná zkouška“ nastane tehdy, nenastane-li A a nenastane B, resp. nastane $\overline{A}$ a současně nastane $\overline{B}$. Je

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,02 \cdot 0,04 = 0,0008.$$

Lze počítat i jako opačný jev k jevu „příměs odhalí alespoň jedna zkouška“, potom je

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9992 = 0,0008.$$

1.5.1 Úlohy k samostatné práci

Příklad 1.14. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami bude součet padlých čísel roven číslu osm? *Nápověda*: Použijte schéma analogické Obrázkům 1.3 až 1.6.

Příklad 1.15. Během dne mají být doplněny zásoby ve skladu, přičemž zásobování probíhá pomocí dvou kamionů, jejichž vyložení trvá přesně 1 hodinu. Sklad přijímá kamiony k vyskladnění v době od 8:00 do 16:00. Kamiony přijíždí nezávisle na sobě náhodně kdykoliv během přijímací doby. Pokud kamion přijede a vykládací rampa je již obsazena jiným kamionem, musí tento počkat na vyložení nákladu předchozího kamionu. Jaká je pravděpodobnost, že jeden kamion bude muset čekat na vyložení předchozího kamionu? *Nápověda*: Vidíte analogii s Adamem a Evou v Příkladu 1.8?

Příklad 1.16. V ruletě mohou padnout čísla $0, 1, 2, \ldots, 36$. Hráč při jednom kole hry učinil celkem tři sázky, přičemž vsadil na sudá čísla, na červenou barvu a na první tucet. S jakou pravděpodobností vyhraje alespoň jednu z těchto 3 sázek? *Poznámka*: Při řešení sledujte hrací plán uvedený na Obrázku 1.7.

Obrázek 1.7: Hrací plán pro ruletu

Příklad 1.17. Víme, že platí následující rovnosti: $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.2$. Rozhodněte, zda jsou jevy A a B:

- nezávislé,
- neslučitelné,

a svou odpověď zdůvodněte.

Příklad 1.18. Náhodný pokus spočívá ve dvou hodech kostkou. Jev A nastane, jestliže při prvním hodu padne číslo 3. Jev B nastane tehdy, padne-li při druhém hodu číslo větší než při prvním hodu. Rozhodněte, zda jsou jevy A a B:

- nezávislé,
- neslučitelné,

a svou odpověď zdůvodněte.

Příklad 1.19. Řidič na cestě do svého zaměstnání projíždí přes tři křižovatky řízené semafory. Na každém z nich mu svítí zelená s pravděpodobností $1/4$. Vypočtěte pravděpodobnost, že

a) „chytne zelenou vlnu“, tj. že na všech semaforech bude svítit zelená,

b) „chytne červenou vlnu“, tj. že na všech semaforech bude svítit červená,

c) bude čekat pouze na prvním semaforu.

Poznámka: Předpokládáme, že semafory jsou řízené nezávisle na sobě a řidič křižovatkou projíždí pouze při zeleném světle na semaforu.

Příklad 1.20. Dva na sobě nezávislí kontroloři kontrolují účetnictví jedné firmy. V účtech je chyba. První kontrolor ji nalezne s pravděpodobností 0,85, druhý kontrolor ji nalezne s pravděpodobností 0,93. Jaká je pravděpodobnost, že

a) chybu odhalí alespoň jeden kontrolor,

b) chybu odhalí oba kontroloři,

c) chybu neodhalí ani jeden kontrolor.

Příklad 1.21. Studenti mají v daném dni cvičení ze tří různých předmětů. Na každý předmět mají jiného kantora, z nichž každý přijde do hodiny pozdě s pravděpodobností 0.1, resp. 0.2, resp. 0.3. Vypočtěte pravděpodobnost, že:

a) alespoň jeden kantor přijde včas,

b) alespoň jeden kantor přijde pozdě.

Příklad 1.22. Zařízení se skládá z 5 stejných, na sobě nezávislých součástek. Pravděpodobnost, že každá z nich bude bezchybně pracovat alespoň 40 hodin, je rovna 0.95. Jaká je pravděpodobnost, že zařízení bude fungovat alespoň 40 hodin, stačí-li, aby fungovaly alespoň 4 součástky?

Příklad 1.23. Kolik hodů mincí je třeba provést, aby pravděpodobnost, že padne alespoň jednou líc, byla větší než $0,9$?

1.6 Podmíněná pravděpodobnost

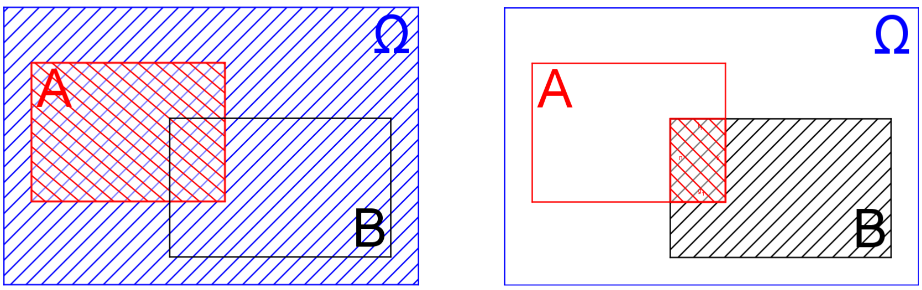
Po prostudování této kapitoly byste měli být schopni:

- rozumět pojmu *podmíněná pravděpodobnost* a umět jej vysvětlit na konkétních příkladech,
- rozumět pojmu *rozklad prostoru elementárních jevů* a umět jej vysvětlit na konkétních příkladech,
- rozumět pojmu *úplná soustava náhodných jevů* a umět jej vysvětlit na konkétních příkladech,
- rozumět vzorci pro výpočet *průniku pravděpodobnosti* v obecném případě (tj. založeném na podmíněné pravděpodobnosti) a umět jej použít v odpovídajících situacích,
- rozumět vzorci pro *úplnou pravděpodobnost náhodného jevu* a umět jej použít v odpovídajících situacích,
- rozumět tzv. *Bayesově vzorci* a umět jej použít v odpovídajících situacích,
- rozumět pojmu *rozklad prostoru elementárních jevů* a umět jej vysvětlit na konkétních příkladech,
- rozumět pojmu *úplná soustava náhodných jevů* a umět jej vysvětlit na konkétních příkladech.

Často se stává, že náhodný pokus který sledujeme, je dodatečně omezen jakousi podmínkou, popřípadě se může stát, že až v průběhu realizace náhodného pokusu získáme nějaké informace, které omezují výsledky náhodného pokusu. Pro popis těchto situací je vhodný pojem *podmíněné pravděpodobnosti.*

Nejčastěji lze uchopit pojem podmíněné pravděpodobnosti tak, že při náhodném pokusu uvažujeme dva jevy - A a B - a zjišťujeme, jaká je pravděpodobnost jevu A, jestliže víme, že nastal jev B. Mluvíme pak o podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B. Tuto situaci značíme symbolem $P(A|B)$.

Počítáme-li nepodmíněnou pravděpodobnost jevu A, jde o jeho relativní velikost vůči celému Ω, zatímco podmíněná pravděpodobnost jevu A je jeho relativní velikost pouze vůči B, viz Obrázek 1.8. Zde obrázek



Obrázek 1.8: Definice podmíněné pravděpodobnosti

vlevo ukazuje nepodmíněnou pravděpodobnost jevu A, zatímco obrázek vpravo zobrazuje podmíněnou pravděpodnost jevu A, tj. pravděpodobnost, že nastal jev A, víme-li, že nastal jev B.

Definice 1.6.1. Pravděpodobností náhodného jevu A za podmínky, že nastal jev B (pro který platí $P(B) \neq 0$), budeme nazývat číslo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.7}$$

Příklad 1.24. Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A nastane tehdy, padne-li číslo větší než 3. Jev B nastane tehdy, padne-li sudé číslo. Jaká je pravděpodobnost jevu A, víme-li, že nastal jev B, tedy víme-li, že padlo sudé číslo?

Řešení: Tuto úlohu jsme již jednou řešili, viz Příklad 1.10 na straně 7. Podívejme se na ni z hlediska podmíněné pravděpodobnosti. Ze zadání plyne, že padlo sudé číslo, tedy nastal jev B. Máme vypočítat, jaká je pravděpodobnost jevu A, když víme, že nastal jev B, tj. máme určit $P(A|B)$. Již víme, že

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}.$$

Navíc víme, viz Příklad 1.9 na straně 5, že

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}.$$

Dosazením do vzorce (1.7) dostaneme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3},$$

což je v souladu s výsledkem Příkladu 1.10.

Příklad 1.25. Náhodný pokus spočívá konání koňského dostihu. Jev A nastane tehdy, zvítězí-li kůň se startovním číslem 1. Jev B nastane tehdy, zvítězí-li kůň se startovním číslem 2. Pravděpodobnosti jsou $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,1$. Závod začal, koně běží a najednou kůň s číslem 1 klopýtnul na překážce, a ze závodu odstoupil. Jaká je nyní pravděpodobnost vítězství koně s číslem 2? Tj. jaká je pravděpodobnost, že vyhraje kůň č. 2, když víme, že nevyhraje kůň č. 1? Ještě jinak - jaká je pravděpodobnost, že nastane jev B, víme-li, že nastane jev $\overline{A}$? (Jev $\overline{A}$ znamená, že kůň č. 1 nevyhraje).

Řešení: Naším úkolem je vypočítat pravděpodobnost $P(B|\overline{A})$. Vzorec (1.7) upravíme do podoby, která odpovídá zadání úlohy. Je

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}.$$

Nyní potřebujeme určit hodnotu $P(B \cap \overline{A})$ a $P(\overline{A})$. Vzhledem k tomu, že jevy A a B považujeme za neslučitelné (tj. buď vyhraje kůň č. 1, nebo vyhraje kůň č. 2), jev B může nastat pouze tehdy, když nevyhraje kůň č. 1, tj. když nastane jev $\overline{A}$. Pro jev B tedy platí vztah $B \subset \overline{A}$, proto $P(B \cap \overline{A}) = P(B) = 0,1$.

Hodnotu $P(\overline{A})$ určíme snadno ze vzorce (1.6) na straně 10. Je

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Dostáváme tak rovnost

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0,1}{0,8} = 0,125.$$

Pravděpodobnost vítězství koně č. 2 se po odstoupení koně č. 1 ze závodu zvýšila na 0,125.

Následující dvě úlohy představují (ne)stručné uvedení dvou vzorců: tzv. vzorce pro úplnou pravděpodobnost a Bayesova vzorce.

Příklad 1.26. Náhodný pokus spočívá v náhodném výběru jedné osoby. Jev A nastane tehdy, je-li touto osobou muž, je $P(A) = 0,5$. Jev B nastane tehdy, má-li vybraná osoba řidičské oprávnění, je $P(B) = 0,75$. Předpokládejme, že mezi muži i ženami je stejné procento osob s řidičským oprávněním (tj. předpokládáme nezávislost držení řidičského oprávnění na pohlaví). Vypočítejte a interpretujte hodnoty

a) $P(A \cap B)$,

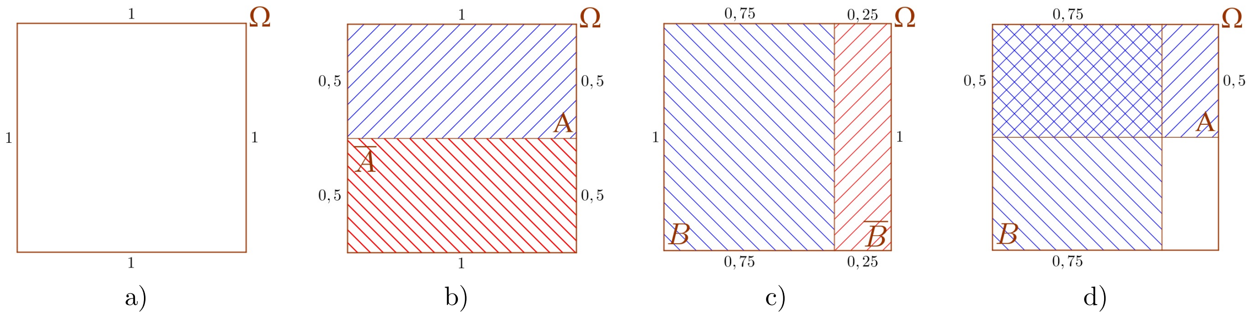
b) $P(A|B)$.

Řešení: Ze zadání plynou tyto údaje:

- A ... výběr muže, $P(A) = 0,5$

- $\overline{A}$ ... výběr ženy, $P(\overline{A}) = 0,5$
- B ... výběr osoby s řidičským oprávněním, $P(B) = 0,75$
- $\overline{B}$ ... výběr osoby bez řidičského oprávnění, $P(\overline{B}) = 0,25$.

Řešení pravděpodobnostních úloh často spočívá ve vytvoření analogické situace, jejíž řešení je intuitivně snažší. Tento přístup zvolíme nyní. Sledujte situaci na Obrázku 1.9. Množinu lidí, ze kterých vybíráme, si



Obrázek 1.9: Ilustrační obrázek k Příkladu 1.26

představíme jako body v jednotkovém čtverci, tj. ve čtverci s délkou strany rovnou jedné, viz podobrázek a). Výběr člověka je analogický výběru bodu z vnitřku čtverce. Jev A je symbolizován výběrem bodu z horní poloviny čtverce, tj. z modře vyšrafované části podobrázku b), resp. jev $\overline{A}$ nastane při výběru bodu z dolní poloviny čtverce, tj. z červeně vyšrafované části podobrázku b). Pravděpodobnost, že náhodným výběrem zvolíme bod ze sekce A je stejná jako pravděpodobnost volby ze sekce $\overline{A}$, neboť obě vyšrafované plochy jsou stejně velké.

Nyní učiníme důležité pozorování, které budeme dále často používat. Pravděpodobnosti jevů A a $\overline{A}$ odpovídají obsahu vyšrafovaných obdélníků, což snadno zdůvodníme podle vzorce (1.1). Je

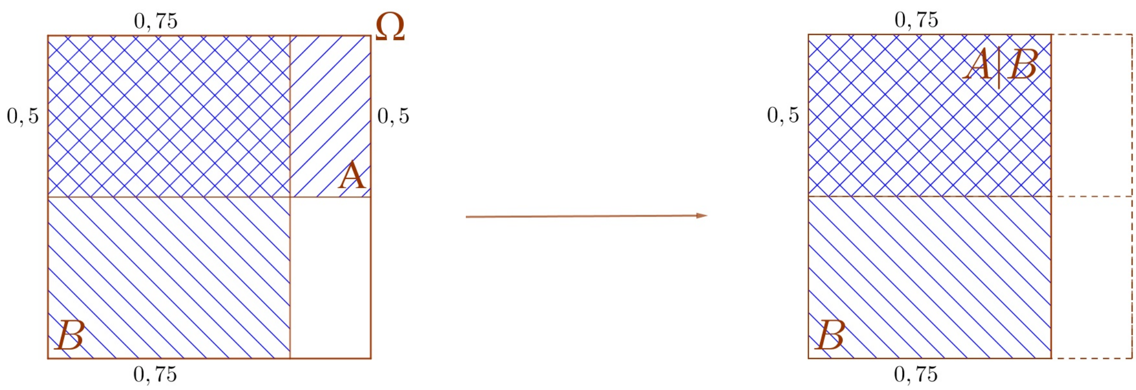
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{0,5}{1} = 0,5.$$

Za mohutnost množin A a Ω jsme přitom uvažovali obsahy uvedených ploch, analogicky dle postupu v Příkladu 1.8 na straně 4. Tím, že je obsah Ω roven jedné, lze v podílu ve vzorci (1.1) jmenovatel zlomku ignorovat, a pravděpodobnost zkoumaného jevu položit rovnu hodnotě výrazu v čitateli zlomku, tj. přímo obsahu útvaru, který symbolizuje daný jev. Tato úvaha přitom platí vždy, když je prostor všech elementárních jevů Ω reprezentován jednotkovým čtvercem z podobrázku a). Tím výpočty pravděpodobností převádíme na výpočty obsahu ploch, které symbolizují dané jevy.

Všimněte si, že jevy A i $\overline{A}$ se nacházejí v obdélnících o rozměrech $1 \times 0,5$, jejichž obsahy jsou rovny 0,5, což jsou i pravděpodobnosti obou jevů. Podobně můžeme zobrazit i jevy B a $\overline{B}$ a jejich pravděpodobnosti, viz podobrázek c). Jev B je symbolizován výběrem bodu z levého obdélníku, tj. z modře vyšrafované části podobrázku c) a jev $\overline{B}$ nastane při výběru bodu z pravého obdélníku, tj. z červeně vyšrafované části podobrázku c). Pravděpodobnost, že náhodným výběrem zvolíme bod ze sekce B je rovna obsahu modře vyšrafované plochy vlevo a platí $P(B) = 1 \cdot 0,75 = 0,75$. Analogicky $P(\overline{B}) = 1 \cdot 0,25 = 0,25$, což odpovídá údajům v zadání úlohy.

Nyní se vrátíme k zadání příkladu a vyřešíme úlohu a). Naším úkolem je vypočítat $P(A \cap B)$; tedy pravděpodobnost, že jevy A a B nastanou současně. Jinými slovy - chceme určit pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk bude muž s řidičským oprávněním. V analogii s množinou bodů - vybíráme z množiny všech bodů a chceme vědět, jaká je pravděpodobnost, že vybraný bod leží v průniku oblastí A a B - což je oblast na podobrázku d), která je dvojitě vyšrafovaná. Tato plocha tvoří obdélník o rozměrech $0,5 \times 0,75$ a obsah tohoto obdélníku současně udává pravděpodobnost průniku obou jevů $P(A \cap B) = 0,5 \cdot 0,75 = 0,375$. Pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude muž s řidičským oprávněním je rovna $0,375$.

Nyní se budeme věnovat úloze b), tedy výpočtu a interpretaci pravděpodobnosti $P(A|B)$. Začneme interpretací hledané pravděpodobnosti. $P(A|B)$ obecně znamená, že víme, že nastal jev B a ptáme se, jaká je nyní pravděpodobnost, že nastal jev A. Situaci si můžeme představit tak, že policista zastavil automobil se zatmavenými skly a přes okno nevidí, zda je řidičem auta muž či žena. Nicméně - osoba, která automobil řídí, má řidičské oprávnění (ehm), takže víme, že nastal jev B. Z našich úvah tak můžeme vypustit skupinu lidí bez řidičského oprávnění a prostor elementárních jevů Ω budou v tomto případě tvořit pouze lidé s řidičským oprávněním, viz pravá strana Obrázku 1.11. Vůči této množině budeme poměřovat mohutnost jevu A. Nyní



Obrázek 1.10: Ilustrační obrázek k Příkladu 1.26

vypočteme $P(A|B)$ na základě tohoto obrázku. Hledaná pravděpodobnost odpovídá podílu mužů s řidičským oprávněním (dvojitě šrafovaná oblast) na počtu všech osob s řidičským oprávněním. Toto odpovídá podílu obsahu dvojitě šrafovaného obdélníku ku obsahu celé oblasti B. Je

$$P(A|B) = \frac{0,5 \cdot 0,75}{0,75} = 0,5.$$

Tedy pravděpodobnost, že náhodně vybranou osobou s řidičským oprávněním je muž, je rovna $0,5$.

K právě provedenému výpočtu připojíme dvě poznámky. Ta první souvisí s tím, že pravděpodobnost výběru muže je stejná v případě kdy máme informaci o vlastnictví řidičského oprávnění i v případě, kdy tento údaj nemáme. Za této situace je tedy $P(A) = P(A|B)$ a rovnost těchto dvou pravděpodobností ukazuje, že jevy A a B jsou nezávislé. Tj. dodatečná informace o tom, zda nastal jeden jev, nemění pravděpodobnost druhého jevu. V případě nezávislých jevů A a B bude vždy tato rovnost platit.

Druhá poznámka ukáže, jak bychom zadanou podmíněnou pravděpodobnost jednoduše vypočítali pomocí vzorce (1.7). Platí

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5 \cdot 0,75}{0,75} = 0,5,$$

kde hodnotu $P(A \cap B)$ jsme vypočítali v části a). Všimněte si, že oba postupy (grafický i dosazení do vzorce) vedou ke stejnému výsledku a uvedený grafický přístup vlastně vysvětluje vzorec (1.7).

Příklad 1.27. Jevy A a B jsou stejné jako v předchozím příkladě, ale nyní je $P(A) = 0,60$, $P(B|A) = 0,80$, $P(B|\overline{A}) = 0,65$.

a) Vysvětlete, co znamenají podmíněné pravděpodobnosti $P(B|A) = 0,80$, $P(B|\overline{A}) = 0,65$,

b) určete $P(B)$,

c) určete $P(A \cap B)$,

d) určete $P(A|B)$.

Řešení: Ze zadání plyne:

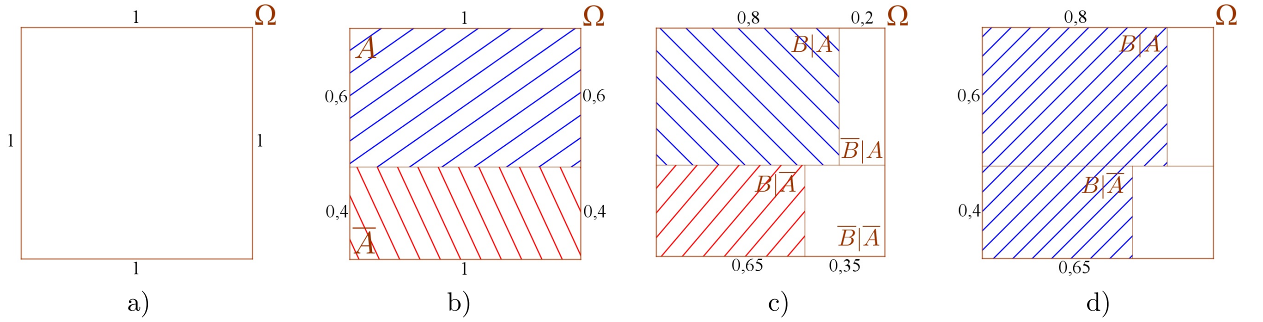
- A ... výběr muže, $P(A) = 0,6$
- $\overline{A}$ ... výběr ženy, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$
- B ... výběr osoby s řidičským oprávněním, $P(B)$ není uvedena,
- $\overline{B}$ ... výběr osoby bez řidičského oprávnění, $P(\overline{B})$ není uvedena.

Dále se budeme věnovat jednotlivým úkolům.

a) Než si níže v textu přečtete odpověď, zkuste si sami zformulovat, co tyto pravděpodobnosti znamenají. ... Obecně - při práci s $P(B|A)$ víme, že nastal jev A a ptáme se, jaká je pravděpodobnost, že nastal jev B. Tedy - víme, že vybranou osobou je muž a zjišťujeme pravděpodobnost, že má řidičské oprávnění. Tato pravděpodobnost je rovna $0,8$. To znamená, že 80 % mužů má řidičské oprávnění (pak existuje 80% pravděpodobnost, že když vybereme muže, bude mít řidičské oprávnění). Také to znamená, že 20 % mužů řidičské oprávnění nemá, tedy existuje 20% pravděpodobnost, že náhodně vybraný muž nemá řidičské oprávnění, tj. platí $P(\overline{B}|A) = 0,2$.

Analogicky, $P(B|\overline{A}) = 0,65$ znamená toto: víme, že jsme vybrali ženu a pravděpodobnost, že tato žena má řidičské oprávnění je $0,65$. To znamená, že mezi ženami je 65 % držitelek řidičského oprávnění a zbývajících 35 % žen jej nemá, tj. platí $P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,35$.

b) V této úloze máme určit hodnotu $P(B)$. Opět se odkážeme na sadu podobrázků v Obrázku 1.11. Stejně jako v Příkladu 1.26 využijeme ztotožnění náhodného výběru osoby a náhodného výběru bodu z jednotkového čtverce, který představuje množinu Ω, viz podobrázek a). Podobrázek b) ukazuje rozdělení



Obrázek 1.11: Ilustrační obrázek k Příkladu 1.27

mužů a žen v množině Ω. Tentokrát je mužů celkem 60 % populace; body, které představují muže proto musí zaujímat 60 % plochy. Jev A nastane při výběru bodu z horního obdélníku (s modrým šrafováním) - tento obdélník má rozměry $0,6 \times 1$, jeho obsah je roven $0,6$ a obsah plochy A tedy odpovídá pravděpodobnosti jevu A.

Žen je 40 %, plocha obsahující ženy tedy vyplňuje 40 % z Ω a jedná se o dolní obdélník s červeným šrafováním. Rozměry dolního obdélníku jsou $0,4 \times 1$, jeho obsah je roven $0,4$ a obsah plochy $\overline{A}$ tedy odpovídá pravděpodobnosti jevu $\overline{A}$.

V podobrázku c) používáme znalost pravděpodobnosti $P(B|A)$ a $P(B|\overline{A})$. Již víme, že rovnost $P(B|A) = 0,8$ říká, že mezi muži má 80 % z nich řidičské oprávnění. Na podobrázku c) jsme tedy na ploše A (horní obdélník) vybrali 80 procent této plochy (modré šrafování) a ta představuje muže s řidičským oprávněním. Zbytek plochy A symbolizuje muže bez řidičského oprávnění. Dále, rovnost $P(B|\overline{A}) = 0,65$ znamená, že 65 % žen má řidičské oprávnění. V dolním obdélníku vybereme 65 % této plochy (vyznačeno červeným šrafováním), a ta bude symbolizovat ženy s řidičským oprávněním. Vidíme, že pokud budeme vybírat body pouze z dolního obdélníku, pravděpodobnost výběru bodu z červeně vyšrafované oblasti je rovna $0,65$, což odpovídá $P(B|\overline{A})$.

Nyní jsme již schopni určit $P(B)$. Jev B nastane, pokud vybereme osobu s řidičským oprávněním (bez ohledu na pohlaví). Osoby s řidičským průkazem se nacházejí ve vyšrafované oblasti na podobrázku d). Zjišťujeme pravděpodobnost, že při náhodném výběru bodu z celé Ω vybereme bod z vyšrafované části. Tato pravděpodobnost odpovídá podílu obsahu vyšrafované části vůči obsahu celé Ω. Obsah plochy Ω je roven jedné, tedy hledaná pravděpodobnost odpovídá obsahu vyšrafované plochy a platí

$$P(B) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,65 = 0,48 + 0,26 = 0,74.$$

Pravděpodobnost výběru osoby s řidičským oprávněním je rovna $P(B) = 0,74$.

Nyní ještě okomentujeme výše uvedený výpočet. Hledanou pravděpodobnost jsme dostali jako součet obsahu dvou obdélníků, které jsme označili symboly $B|A$ a $B|\overline{A}$. Každý z nich má délku stran odpovídající jednak pravděpodobnostem $P(A)$, resp $P(\overline{A})$, jednak $P(B|A)$, resp. $P(B|\overline{A})$, proto je

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}). \tag{1.8}$$

c) Hodnota $P(A \cap B)$ představuje pravděpodobnost, že při náhodném výběru osoby (bodu) z Ω vybereme takovou osobu (bod), že nastane jev A a současně jev B, tedy výběr muže s řidičským oprávněním. Hodnotu $P(A \cap B)$ určíme úpravou vzorce 1.7 pro tuto situaci. Je

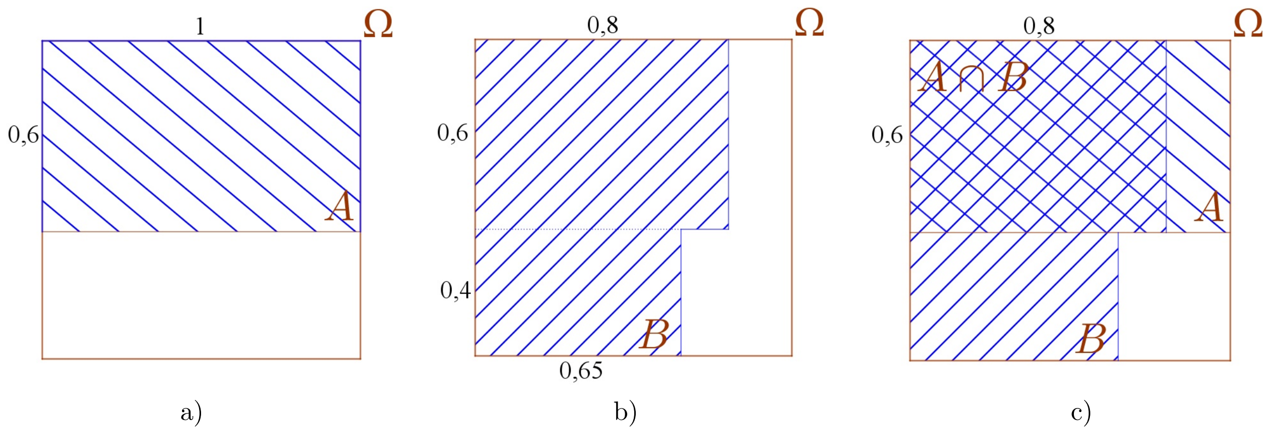
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \rightarrow \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

přičemž hodnoty $P(A)$ a $P(B|A)$ známe.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Pravděpodobnost, že při náhodném výběru osoby vybereme muže s řidičským oprávněním je rovna $0,48$.

Opět doplníme krátký komentář pomocí podobrázků Obrázku 1.12. Podobrázek a) ukazuje vyšrafovanou plochu, ve které body představují muže. Výběr bodu z vyšrafované části představuje výběr muže, tedy



Obrázek 1.12: Ilustrační obrázek k Příkladu 1.27 c)

jev A. Vyšrafovaná plocha na podobrázku b) představuje osoby s řidičským oprávněním, při jejich výběru nastane jev B. Dvojitě vyšrafovaná plocha na podobrázku c) tedy představuje průnik obou jevů - situaci, kdy vybraná osoba je muž s řidičským průkazem. Pravděpodobnost, že nastane jev $A \cap B$ je rovna podílu obsahu plochy $A \cap B$ ku obsahu Ω, tedy přímo obsahu obdélníku $A \cap B$. Tento obdélník má délky stran $0,6 \times 0,8$, kde $0,6 = P(A)$ a $0,8 = P(B|A)$. Proto je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

d) Při určování hodnoty $P(A|B)$, že víme, že byla vybrána osoba s řidičským oprávněním a máme určit pravděpodobnost, že tato osoba je muž. Při výpočtu můžeme použít již známé výsledky. Vyjdeme ze vzorce (1.7), do kterého dosadíme výsledky částí b) a c) tohoto příkladu. Je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})} = \frac{0,6 \cdot 0,8}{0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,65} = \frac{0,48}{0,74} \doteq 0,649.$$

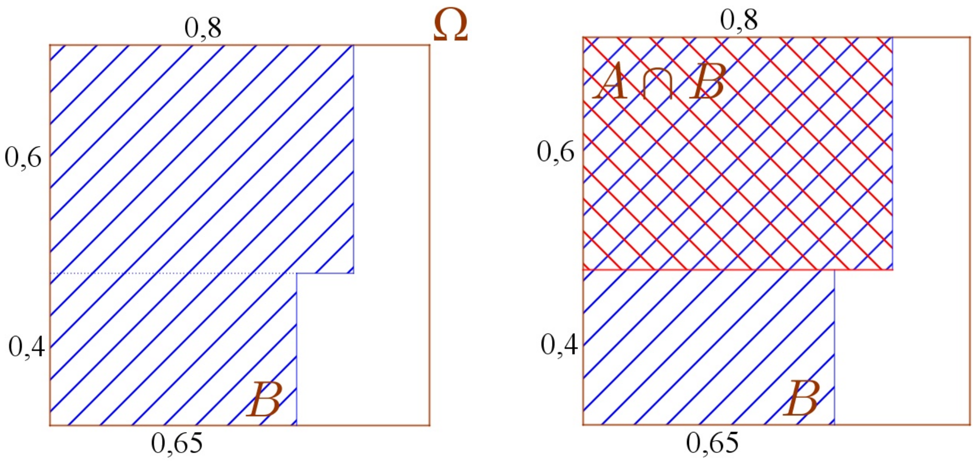
Pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba s řidičským průkazem je muž, je rovna přibližně $0,649$.

K výsledku opět připojíme několik komentářů. Pokud nemáme další informace, tak pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba je muž, činí $P(A) = 0,6$. Pokud máme navíc informaci, že daná osoba má řidičské oprávnění, tak se pravděpodobnost výběru muže zvýšila na $P(A|B) \doteq 0,649$. V principu je to dáno tím, že mezi muži je podle zadání více držitelů řidičského oprávnění než mezi ženami. Povědomost o (ne)vlastnění řidičského oprávnění vybrané osoby změnila pravděpodobnost, zda tato osoba je či není muž. Podle již dříve řečeného to znamená, že jevy A a B jsou v tomto příkladu závislé. Také to znamemá, že pro závislé jevy A a B platí $P(A) \neq P(A|B)$. Berte toto tvrzení jako doplnění ke komentáři k Větě 1.4.1 na straně 8.

Vzorec

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})} \tag{1.9}$$

použitý pro výpočet $P(A|B)$ lze opět snadno zdůvodnit grafických náhledem. Pro $P(A|B)$ předpokládáme, že nastal jev B, tj. body, ze kterých provádíme výběr, se nacházejí pouze ve vyšrafované části na levé straně Obrázku 1.13. Zajímá nás, jaká je pravdědépodobnost, že když vybíráme pouze z těchto bodů, naše volba padne na bod, který patří do jevu A, tedy do části $A \cap B$, která je představována dvojitě vyšrafovanou částí v pravé části obrázku. Hodnota pravděpodobnosti odpovídá poměru obsahů obou zmíněných částí.



Obrázek 1.13: Ilustrační obrázek k Příkladu 1.27 d)

Za pomoci Příkladů 1.26 a 1.27 jsme odvodili dva důležité vztahy.

Věta 1.6.2 (**Vzorec pro úplnou pravděpodobnost**). *Mějme jev A a jev k němu opačný $\overline{A}$. Pak pro libovolný náhodný jev B platí*

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}). \tag{1.10}$$

Věta 1.6.3 (**Bayesův vzorec**). *Mějme jev A a jev k němu opačný $\overline{A}$, a nechť platí, že $P(A) \neq 0$, $P(\overline{A}) \neq 0$. Dále nechť pro náhodný jev B platí $P(B) \neq 0$. Pak platí*

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})}. \tag{1.11}$$

Ukažme si použití obou vět v následujících příkladech.

Příklad 1.28. Dva stroje vyrábějí tentýž výrobek, první stroj vyrábí 60 % produkce a druhý stroj vyrábí 40 % produkce. Pravděpodobnost vyrobení zmetku u obou strojů je po řadě 5 % a 3 %. Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek z produkce je zmetek?

Řešení: Označme si tyto náhodné jevy:

A ... výrobek byl vyroben na prvním stroji,

$\overline{A}$ ... výrobek byl vyroben na druhém stroji,

B ... výrobek je zmetek.

Pokud výrobek pochází z prvního stroje, pak pravděpodobnost, že se jedná o zmetek, je rovna $0,05$. Tj. pokud nastal jev A, pak pravděpodobnost, že nastane i jev B odpovídá $P(B|A) = 0,05$. Analogicky, hodnotu $0,03$ dostaneme, pokud víme, že výrobek pochází z druhého stroje (nastal jev $\overline{A}$) a chceme znát pravděpodobnost, že je to zmetek (tedy pravděpodobnost, že nastane jev B, když nastal jev $\overline{A}$). Je tedy:

$$P(A) = 0,60, \quad P(\overline{A}) = 0,40, \quad P(B|A) = 0,05, \quad P(B|\overline{A}) = 0,03.$$

Dosazením do vzorce pro úplnou pravděpodobnost obdržíme

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) = 0,60 \cdot 0,05 + 0,40 \cdot 0,03 = 0,042.$$

V celkové produkci je tedy $4,2$ % zmetků.

Příklad 1.29. Velkoobchod odebírá počítače od dvou dodavatelů. První dodavatel pokrývá odběr velkoobchodu z 80 %, přičemž 75 % dodávky tvoří počítače osazené procesorem Intel. Druhý dodavatel pokrývá odběr velkoobchodu ze zbývajících 20 %, přičemž 60 % dodávky tvoří počítače osazené procesorem Intel. Pokud by si zákazník vybral počítač zcela náhodně, jaká je pravděpodobnost, že tento počítač bude osazen procesorem Intel?

Řešení: Označme si tyto náhodné jevy:

A ... náhodně vybraný počítač je od prvního dodavatele,

$\overline{A}$ ... náhodně vybraný počítač je od druhého dodavatele,

B ... náhodně vybraný počítač je osazen procesorem Intel.

Podle znění úlohy zjistíme, následující pravděpodobnosti:

$$P(A) = 0,80, \quad P(\overline{A}) = 0,20, \quad P(B|A) = 0,75, \quad P(B|\overline{A}) = 0,60.$$

Dosazením do vzorce pro úplnou pravděpodobnost obdržíme

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) = 0,80 \cdot 0,75 + 0,20 \cdot 0,60 = 0,72.$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný počítač je osazen procesorem Intel, je rovna $0,72$.

Příklad 1.30. Uvažujme stejné zadání jako v Příkladu 1.29. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný počítač s procesorem Intel pochází od prvního, resp. druhého dodavatele?

Řešení: Podle předchozího zadání je pravděpodobnost, že PC s procesorem Intel pochází od prvního dodavatele, podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$. Podle Bayesova vzorce je

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})} = \frac{0,8 \cdot 0,75}{0,8 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,6} = \frac{0,6}{0,72} = 0,83\overline{3}$$

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,8 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,6} = \frac{0,12}{0,72} = 0,16\overline{6}$$

Pravděpodobnost, že PC s procesorem Intel pochází od prvního dodavatele je cca $0,833$, od druhého dodavatele $0,167$.

Příklad 1.31. Sportovci podstupují při dopingové kontrole test, který by měl odhalit používání zakázaných látek. Předpokládejme, že naprostá většina sportovců je poctivá a nedovoleným způsobem si pomáhá pouze 1 sportovec z 1000. (Uznávám, že tento údaj asi nikdy přesně nezjistíme a o jeho přesnější hodnotě lze vést debatu.) Pokud kontrolovaný sportovec doping používá, test to z odebraného vzorku rozpozná v 99 % případů. Nechť má ale toto vyšetření zároveň 5% falešnou pozitivitu (tj. 5 % z pozitivních testů patří sportovcům, kteří ve skutečnosti doping nepoužívají, tj. test je přespříliš citlivý). Vypočtěte, s jakou pravděpodobností kontrolovaný sportovec skutečně používá zakázané prostředky, jestliže má pozitivní dopingový test.

Řešení: Náhodným pokusem je výběr osoby a její otestování na používání dopingu. Zavedeme náhodné jevy D a T, kde:

- Jev D nastane, pokud testovaný sportovec dopuje, tj. užívá zakázané látky podporující výkon,
- jev T nastane, pokud má sportovec pozitivní test na doping.

Ze zadání plyne

- $P(D) = 0,001$,
- $P(\overline{D}) = 0,999$,
- $P(T|D) = 0,99$,
- $P(T|\overline{D}) = 0,05$,

přičemž chceme určit $P(D|T)$, tj. pravděpodobnost, že sportovec opravdu dopuje, pokud má pozitivní test.

Podle Bayesovy věty je

$$\begin{aligned} P(D|T) &= \frac{P(D)\cdot P(T|D)}{P(D)\cdot P(T|D)+P(\overline{D})\cdot P(T|\overline{D})} = \frac{0,001\cdot 0,99}{0,001\cdot 0,99+0,999\cdot 0,05} \\ &= \frac{0,00099}{0,00099+0,04995} = \frac{0,00099}{0,05094} \doteq 0,01943 < 0,02. \end{aligned}$$

Přestože test vyšel pozitivní, pravděpodobnost, že sportovec dopuje, činí přibližně $0,019$. Jinými slovy, za výše uvedených podmínek více než 98% sportovců, kteří mají pozitivní test na doping, ve skutečnosti nedopuje.

Příklad 1.32. V této úloze navážeme na předchozí úlohu. Platí stejné zadání ohledně vlastností testu a počtu dopujících sportovců. Nyní navíc necháme sportovce, kteří měli pozitivní test, otestovat ještě jednou - kontrola vzorku B. Jaká je potom pravděpodobnost, že sportovec, jehož druhý test vyšel pozitivní, opravdu dopuje?

Řešení: Jevy D a T znamenají totéž jako v Příkladu 1.31. Změnou oproti postupu řešení v předchozí úloze je, že nyní se již věnujeme pouze sportovcům, u kterých první test vyšel pozitivní. Použijeme výsledek z předchozí úlohy a víme, že mezi těmito sportovci dopuje $1,94$ %, tj. ve skupině osob, u kterých provádíme druhý test, je $1,94$ % dopujících (oproti 0,1 % v původní úloze). Z toho důvodu je nyní $P(D) = 0,0194$. Dostáváme tak,

- $P(D) = 0,01943$,
- $P(\overline{D}) = 0,98057$,
- $P(T|D) = 0,99$,
- $P(T|\overline{D}) = 0,05$.

Dosazením do Bayesova vzorce dostaneme

$$\begin{aligned} P(D|T) &= \frac{P(D)\cdot P(T|D)}{P(D)\cdot P(T|D)+P(\overline{D})\cdot P(T|\overline{D})} = \frac{0,0194\cdot 0,99}{0,01943\cdot 0,99+0,98057\cdot 0,05} \\ &= \frac{0,019206}{0,019206+0,0490285} = \frac{0,019206}{0,0682345} \doteq 0,281. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že sportovec se dvěma pozitivními testy skutečně dopuje, je rovna přibližně $0,281$.

Nějaký podrobnější komentář k právě vyřešené úloze vynecháme, neboť vstupní data jsou vymyšlená a jistě neodpovídají realitě. Bylo by tedy chybou tyto výsledky nějak zobecňovat. Nicméně, výše uvedený postup ukazuje na chyby, které často provádíme v našich úsudcích - předpokládám, že výsledky úloh byly nečekané a překvapující - přestože výpočet je proveden správně!

Následující úloha je naprosto nepraktická, nicméně hezky ilustruje práci s podmíněnými pravděpodobnostmi.

Příklad 1.33. V osudí je 5 černých a 15 bílých koulí. Z osudí se vytáhne jedna koule, vrátí se zpět, přidá se 20 koulí stejné barvy, jakou měla vytažená koule a tah se opakuje. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule bude černá?

Řešení: Náhodným pokusem je postupný výběr dvou koulí z osudí. Označme si tyto náhodné jevy:

A ... první vytažená koule je černá,

$\overline{A}$ ... první vytažená koule je bílá,

B ... druhá vytažená koule je černá.

Podle zadání úlohy vyjádříme následující pravděpodobnosti.

- $P(A) = 5/20 \ldots$ (v osudí je 5 černých koulí),

- $P(\overline{A}) = 15/20 \ldots$ (v osudí je 15 bílých koulí),
- $P(B|A) = 25/40 \ \ldots$ (v prvním tahu jsme vybrali černou kouli, vrátili ji zpět a přidali 20 koulí černé barvy, tj. nyní je v osudí 25 černých koulí z celkového počtu 40 koulí),
- $P(B|\overline{A}) = 5/40 \ \ldots$ (v prvním tahu jsme vybrali bílou kouli, vrátili ji zpět a přidali 20 bílých koulí, tj. nyní je v osudí 5 černých koulí z celkového počtu 40 koulí).

Chceme znát pravděpodobnost, že v druhém tahu vybereme černou kouli, tj. chceme znát pravděpodobnost jevu B. Dosazením do vzorce pro úplnou pravděpodobnost obdržíme

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) = \frac{5}{20} \cdot \frac{25}{40} + \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{40} = \frac{1}{4}.$$

Pravděpodobnost, že v druhém tahu bude vytažena černá koule, je $0,25$.

1.6.1 Rozklad prostoru elementárních jevů - úplná soustava náhodných jevů

Výše uvedené poznatky, zejména znění Vět 1.6.2 a 1.6.3 lze zobecnit. K tomu potřebujeme zavést pojem *úplná soustava náhodných jevů*. K jeho ilustraci uvedeme následující úlohu.

Příklad 1.34. Náhodným pokusem je výběr osoby v ČR. Podle toho, jaké je nejvyšší dosažené vzdělání dané osoby, zavádíme tyto náhodné jevy.

- jev A_1 - výběr osoby s nejvýše ZŠ
- jev A_2 - výběr osoby s SŠ bez maturity
- jev A_3 - výběr osoby s SŠ s maturitou
- jev A_4 - výběr osoby s VŠ

Všimněte si, že při výběru každého občana ČR nastává právě jeden z uvedených jevů - žádné dva různé jevy nemohou nastat současně - jevy A_1 až A_4 jsou navzájem neslučitelné. Sjednocení všech jevů však dává dohromady celý prostor elementárních jevů Ω, tj. každý občan ČR patří do jedné z výše uvedených skupin.

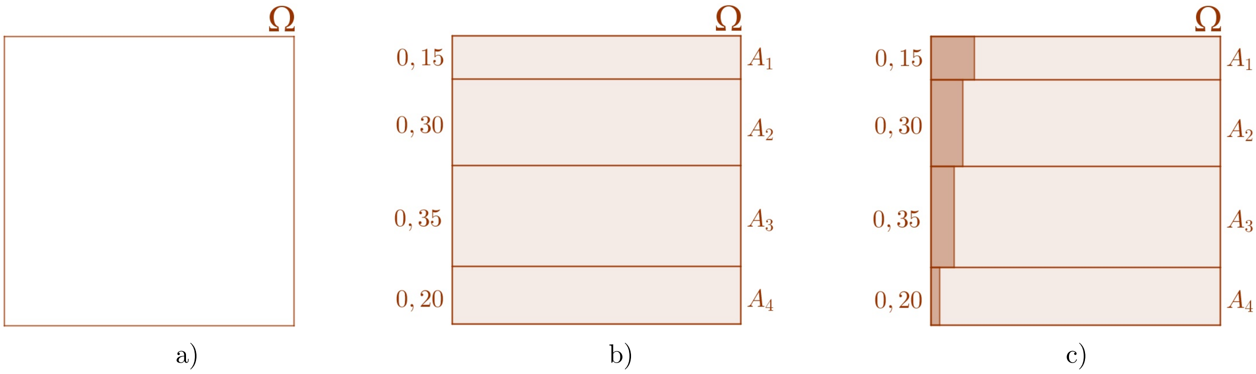
Definice 1.6.4. Náhodné jevy A_1, A_2, A_3, $\ldots$,A_n budeme nazývat *úplnou soustavou náhodných jevů* právě tehdy, platí-li pro všechna $i \neq j$ rovnost $A_i \cap A_j = \emptyset$ a současně je $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Příklad 1.35. Náhodný pokus spočívá v náhodném výběru osoby v ČR. Náhodný jev N nastane, je-li vybraná osoba nezaměstnaná. Dále uvažujme stejné jevy A_1 až A_4 jako v Příkladu 1.35. Pro zavedené jevy platí pravděpodobnosti $P(A_1) = 0,15$, $P(A_2) = 0,30$, $P(A_3) = 0,35$, $P(A_4) = 0,20$ a dále platí:

- $P(N|A_1) = 0,15$,
- $P(N|A_2) = 0,11$,
- $P(N|A_3) = 0,08$,
- $P(N|A_4) = 0,03$.

Interpretujte jednotlivé pravděpodobnosti a vypočtěte $P(N)$.

Řešení: Naše úvahy při řešení úlohy budeme opírat o podobrázky a) až c) Obrázku 1.14. Opět budeme vycházet z analogie výběru lidí z populace ČR a výběru bodů z jednotkového čtverce, kde výběr člověka promítneme do výběru bodu. Podobrázek a) zobrazuje prostor elementárních jevů Ω. Tento čtverec rozdělíme na čtyři části tak, aby proporcionálně odpovídaly pravděpodobnostem jevů A_1 až A_4, viz podobrázek b), kde čísla na levé straně obrázku odpovídají výškám jednotlivých obdélníků. Poznamenejme, že rovnost $P(A_1) = 0,15$ říká, že v populaci je 15 % lidí s nejvyšším dosaženým vzděláním odpovídajícím nejvýše ZŠ, podobně pro A_2 až A_4. Podobrázek c) pak znázorňuje podmíněné pravděpodobnosti $P(N|A_1)$ až $P(N|A_4)$, kde rovnost $P(N|A_1) = 0,15$ znamená, že mezi lidmi s nejvýše ZŠ je 15 % nezaměstnaných, rovnost $P(N|A_2) = 0,11$ znamená, že mezi lidmi se SŠ bez maturity je 11 % nezaměstnaných atd. Nezaměstnaní se v jednotlivých pruzích nacházejí v tmavých obdélnících. Délka základny obdélníku v pruhu A_1 je rovna $0,15$ a odpovídá $P(N|A_1)$, délka základny obdélníku v pruhu A_2 je rovna $0,11$ a odpovídá $P(N|A_2)$ atd.



Obrázek 1.14: Ilustrační obrázek k Příkladu 1.35

Hodnota $P(N)$ říká, jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru bodu z jednotkového čtverce (což odpovídá náhodnému výběru jednoho občana z populace ČR) bude tento bod ležet v tmavých obdélnících (což odpovídá tomu, že tato osoba bude nezaměstnaná). Požadovanou pravděpodobnost vypočteme tak, že společný obsah tmavých obdélníků vydělíme obsahem jednotkového čtverce, tedy odpovídá součtu obsahů tmavých obdélníků. Tím dostáváme následující rovnost.

$$P(N) = 0,15 \cdot 0,15 + 0,30 \cdot 0,11 + 0,35 \cdot 0,08 + 0,20 \cdot 0,03 = 0,0225 + 0,033 + 0,028 + 0,006 = 0,0895$$

Pravděpodobnost, že při náhodném výběru dojde k výběru nazaměstnaného, je rovna $0,0895$.

Vypočtený příklad můžeme zobecnit do znění následující věty.

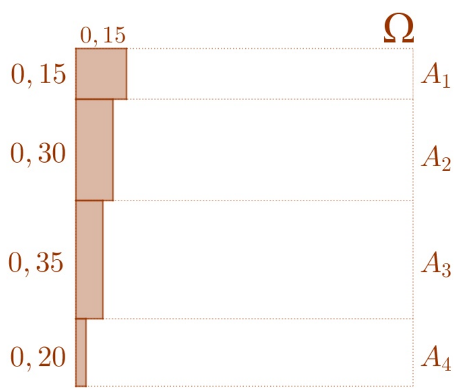
Věta 1.6.5. *Nechť A_1, A_2, A_3, ...,A_n je úplná soustava náhodných jevů, nechť pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$ platí, že $P(A_i) \neq 0$. Pak pro libovolný náhodný jev B platí*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n). \tag{1.12}$$

Následující úloha představuje úvod do zobecnění Bayesova vzorce pro jevy tvořící úplný systém náhodných jevů.

Příklad 1.36. Zadání úlohy je stejné jako v Příkladu 1.35. Určete a interpretujte $P(A_1|N)$.

Řešení: Při řešení úlohy vyjdeme z Obrázku 1.15. Hodnota $P(A_1|N)$ znamená pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba má nejvýše ZŠ, když víme, že se jedná o nezaměstnaného člověka. Jinými slovy - víme, že vybíráme pouze z osob, které jsou nezaměstnané a chce zjistit pravděpodobnost, že vybraná osoba má nejvýše ZŠ. Z hlediska našeho grafického přístupu to odpovídá situaci, kdy vybíráme body ze zatmavené plochy na



Obrázek 1.15: Ilustrační obrázek k Příkladu 1.36

Obrázku 1.15 a chceme znát pravděpodobnost, že tento bod navíc leží v nejvýše položeném pruhu, tj. v pruhu A_1. Tato pravděpodobnost odpovídá podílu obsahu obdélníku v pruhu A_1 ku obsahu celé zatmavené plochy. Víme, že jednotlivé obdélníky mají rozměry $P(A_i) \times P(N|A_i)$, je proto

$$P(A_1|N) = \frac{0,15 \cdot 0,15}{0,15 \cdot 0,15 + 0,30 \cdot 0,11 + 0,35 \cdot 0,08 + 0,20 \cdot 0,03} = \frac{0,0225}{0,0895} \doteq 0,2514.$$

Vypočtený příklad můžeme zobecnit do znění následující věty.

Věta 1.6.6. *Nechť A_1, A_2, A_3, …,A_n je úplná soustava náhodných jevů, nechť pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$ platí, že $P(A_j) \neq 0$, nechť pro náhodný jev B platí $P(B) \neq 0$. Pak pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ platí*

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \big(P(A_i) \cdot P(B|A_i)\big)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}. \tag{1.13}$$

Rovnice (1.13) představuje obecný Bayesův vzorec pro úplnou soustavu náhodných jevů. Vzorec (1.11) na straně 19 je speciálním případem tohoto vzorce, neboť dvojice jevů A a $\overline{A}$ společně tvoří úplný systém náhodných jevů (proč?). Ze stejného důvodu je rovnice (1.10) na straně 19 speciálním případem vzorce (1.12).

1.6.2 Úlohy k samostatnému řešení

Příklad 1.37. Předpokládejme, že každý občan ČR podstoupí laboratorní vyšetření na přítomnost choroby, která se v populaci vyskytuje u 1 jedince z 10 000 (hodnota 0,000 1 je tzv. prevalence nemoci). Pokud se u vyšetřovaného jedince nemoc vyskytuje, vyšetření ji ze vzorku rozpozná v 90 % případů. Nechť má ale toto vyšetření zároveň 10% falešnou pozitivitu (tj. 10% z pozitivních testů patří jedincům, kteří ve skutečnosti danou nemocí netrpí). Test pacienta vyšel pozitivní (což je pro pacienta negativní zpráva) - s jakou pravděpodobností vyšetřená osoba danou nemocí skutečně trpí?

Příklad 1.38. Uvažujme stejné zadání jako v Příkladu 1.37. Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude mít pozitivní výsledek testu.

Příklad 1.39. Uvažujme stejné zadání jako v Příkladu 1.37 s výjimkou hodnoty prevalence nemoci, která je nyní 0,1, tj. 10 % populace má danou nemoc. Vypočtěte:

a) Jaká je pravděpodobnost, že osoba s pozitivním testem je skutečně nemocná?

b) Jaká je pravděpodobnost, že osoba s negativním testem touto nemocí skutečně netrpí?

Příklad 1.40. Obchodní řetězec odebírá a ve svém obchodě nabízí zboží od tří různých dodavatelů - označme je písmeny A, B a C. Každý z dodavatelů nabízí zboží I. a II. jakosti. Od dodavatele A je 40 % zboží I. jakosti, dodavatel B poskytuje 60 % zboží I. jakosti a od dodavatele C je 70 % zboží I. jakosti. Zbytek jsou vždy výrobky II. jakosti. Dodavatel A pokrývá 50 %, dodavatel B 30 % a dodavatel C pokrývá 20 % dodávky obchodnímu řetězci.

a) Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek v obchodě bude I. jakosti.

b) Vypočtěte pravděpodobnost, s jakou náhodně vybraný výrobek II. jakosti pochází od dodavatele B.

Příklad 1.41. V balíčku 32 hracích karet jsou 4 esa. Z balíčku vybereme jednu kartu, podíváme se na ni, dáme ji stranou, do balíčku ji už nevracíme (tzv. výběr bez vracení) a ze zbývajících karet vytáhneme druhou kartu.

a) Vypočtěte pravděpodobnost, že druhá tažená karta bude eso.

b) Vypočtěte pravděpodobnost, že obě tažené karty budou esa.

Příklad 1.42. V balíčku 32 hracích karet jsou 4 esa. Z balíčku vybereme jednu kartu, podíváme se na ni, vrátíme ji zpět do balíčku (tzv. výběr s vracením) a z tohoto balíčku karet vytáhneme druhou kartu.

a) Vypočtěte pravděpodobnost, že druhá tažená karta bude eso.

b) Vypočtěte pravděpodobnost, že obě tažené karty budou esa.

c) Porovnejte pravděpodobnosti, že obě tažené karty jsou esa v případě výběru s vracením a výběru bez vracení a okomentujte (vysvětlete) výsledek tohoto srovnání.

1.7 Shrnutí kapitoly

- **Náhodným pokusem** rozumíme každé pozorování nějakého náhodného děje, každé zaznamenání, změření či konstatování jeho výsledku. Stručně - před proběhnutím náhodného děje nevíme, jaký bude výsledek tohoto pokusu, ale po ukončení tohoto náhodného děje jsme schopni výsledek zaznamenat, změřit či konstatovat.
- **Náhodný jev** je každý možný výsledek náhodného pokusu.
- **Elementární jevy** jsou nejjednodušší výsledky náhodného pokusu, které se nedají složit z žádných jiných jevů. Množinu všech elementárních jevů budeme nazývat *prostorem elementárních jevů* a značit jej symbolem Ω.
- Řekneme, že nastalo **sjednocení jevů** A a B (značíme $A \cup B$) právě tehdy, nastal-li jev A nebo jev B, nebo oba současně.
- Řekneme, že nastal **průnik jevů** A a B (značíme $A \cap B$) právě tehdy, nastal-li jev A a současně nastal jev B.
- Jev **rozdíl jev**ů A a B (značíme $A \backslash B$) nastane právě tehdy, nastane-li jev A a nenastane jev B.
- Jev $\overline{A}$, tzv. **opačný** (doplňkový, komplementární) **jev** k jevu A, nastane právě tehdy, nenastane-li jev A.
- Náhodný jev, který nastane vždy, se nazývá **jev jistý**. Označuje se také Ω a je vlastně sjednocením všech jevů, které mohou nastat.
- Jev, který nenastane nikdy, nazýváme **jev nemožný** a značíme ho $\emptyset$.
- Jsou-li A a B takové jevy, že $A \cap B = \emptyset$, nazýváme je **neslučitelné** (disjunktní) **jevy**. Neslučitelné jevy tedy nemohou nastat současně.
- Pro náhodný jev A definujeme jeho pravděpodobnost vztahem
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$
kde $m(A)$, resp. $m(\Omega)$ znamená mohutnost množiny A, resp. Ω.
- Pro libovolné jevy A a B platí vztah
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$
- Speciálně, jsou-li A a B nezávislé jevy, potom platí rovnost
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$
- Pro libovolné jevy A a B platí vztah
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
- Speciálně, jsou-li A a B nezávislé jevy, potom je
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$
- Speciálně, jsou-li A a B neslučitelné jevy, potom je
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Pro pravděpodobnosti jevů A a $\overline{A}$ platí:
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

- Pravděpodobností náhodného jevu A za podmínky, že nastal jev B (pro který platí $P(B) \neq 0$), budeme nazývat číslo
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

- Mějme jev A a jev k němu opačný $\overline{A}$. Pak pro libovolný náhodný jev B platí
$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}).$$

- Mějme jev A a jev k němu opačný $\overline{A}$, a nechť platí, že $P(A) \neq 0$, $P(\overline{A}) \neq 0$. Dále nechť pro náhodný jev B platí $P(B) \neq 0$. Pak platí
$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})}.$$

- Náhodné jevy A_1, A_2, A_3, $\ldots$,A_n budeme nazývat *úplnou soustavou náhodných jevů* právě tehdy, platí-li pro všechna $i \neq j$ rovnost $A_i \cap A_j = \emptyset$ a současně je $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

- Nechť A_1, A_2, A_3, $\ldots$,A_n je úplná soustava náhodných jevů, nechť pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ platí, že $P(A_i) \neq 0$. Pak pro libovolný náhodný jev B platí
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

- Nechť A_1, A_2, A_3, $\ldots$,A_n je úplná soustava náhodných jevů, nechť pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$ platí, že $P(A_j) \neq 0$, nechť pro náhodný jev B platí $P(B) \neq 0$. Pak pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ platí
$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \big(P(A_i) \cdot P(B|A_i)\big)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}.$$