Kapitola 1

Náhodná veličina, rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny

V této kapitole se budeme zabývat pojmem *náhodná veličina* a vlastnostmi náhodné veličiny. Budeme přitom vycházet z videopřednášek v Moodlu, které připravila přednášející dr. Šimsová - tzn. že byste tato videa měli mít shlédnuta, než začnete číst tento text. Po prostudování kapitoly byste měli být schopni:

- rozumět pojmu *náhodná veličina*,
- při zadání konkrétního příkladu náhodné veličiny určit její *výběrový prostor*,
- rozlišovat *diskrétní* náhodnou veličinu a *spojitou* náhodnou veličinu,
- rozumět pojmu *pravděpodobnostní funkce* diskrétní náhodné veličiny,
- rozumět pojmu *distribuční funkce* náhodné veličiny,
- rozumět pojmu *rozdělení pravděpodobnosti* diskrétní náhodné veličiny,
- pracovat s *charakteristikami* diskrétní náhodné veličiny, mezi které patří zejména:
  - první obecný moment, tedy *střední hodnota* náhodné veličiny,
  - druhý obecný moment náhodné veličiny,
  - druhý centrovaný moment, neboli *rozptyl* náhodné veličiny,
  - *směrodatná odchylka* náhodné veličiny,
  - modální hodnota, neboli *modus* náhodné veličiny,
  - *p% kvantil* náhodné veličiny,
- pracovat s pojmem náhodná veličina s *alternativním rozdělením* pravděpodobnosti,
- pracovat s pojmem náhodná veličina s *binomickým rozdělením* pravděpodobnosti,
- pracovat s pojmem náhodná veličina s *Poissonovým rozdělením* pravděpodobnosti,
- pracovat s pojmem náhodná veličina s *hypergeometrickým rozdělením* pravděpodobnosti.

1.1 Náhodná veličina, pravděpodobnostní funkce

V níže uvedeném příkladu představíme pojmy náhodná veličina, výběrový prostor náhodné veličiny a pravděpodobnostní funkce (též funkce pravděpodobnosti) náhodné veličiny.

1.1. Studenti skládají písemku sestávající ze tří úloh. Za každou z nich mohou získat až dva body. Celkem tedy mohou při písemce získat nejvýše šest bodů. Víme, že jeden student získal 0 bodů, dva získali 1 bod, 4 studenti získali 2 body, šest studentů 3 body, čtyři studenti 4 body, dva studenti 5 bodů a jeden student 6 bodů. Náhodným pokusem je náhodný výběr jedné písemky. Označme symbolem $\mathbb{X}$ počet bodů, které má tato vybraná písemka. Jaké hodnoty $\mathbb{X}$ můžeme očekávat a jaké jsou jejich pravděpodobnosti?

Řešení: Ze zadání plyne, že veličina $\mathbb{X}$ nabývá hodnoty pouze z množiny $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Může tedy být $\mathbb{X} = 0$, resp. $\mathbb{X} = 1, \ldots, \mathbb{X} = 6$.

Vypočteme pravděpodobnost, že náhodně vybraná písemka je ohodnocena nula body. Matematicky tuto situaci vyjádříme zápisem $P(\mathbb{X} = 0)$. Tedy symbol $P(\mathbb{X} = 0)$ znamená pravděpodobnost jevu, že $\mathbb{X}$ bude rovno nule. Podobně, symbol $P(\mathbb{X} = 1)$ znamená pravděpodobnost, že $\mathbb{X}$ bude rovno jedné; tedy pravděpodobnost, že při náhodném výběru jedné písemky vytáhneme tu s jedním bodem.

Pro výpočet pravděpodobnosti uvedeme hodnoty ze zadání do přehledné tabulky, viz Tabulka 1.1. Z tabulky snadno vyčteme, že studentů je celkem 20. Písemku s nulou bodů napsal

počet bodů z písemky	0	1	2	3	4	5	6	celkem
počet žáků s daným počtem bodů	1	2	4	6	4	2	1	20

Tabulka 1.1: Počty studentů s daným počtem bodů z písemné práce

jeden z nich, proto pravděpodobnost výběru písemky s nulou bodů je rovna

$$P(\mathbb{X} = 0) = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Podobným způsobem určíme, že (viz ostatní hodnoty v Tabulce 1.1)

$$P(\mathbb{X} = 1) = \frac{2}{20} = 0.10, \quad P(\mathbb{X} = 2) = \frac{4}{20} = 0.20, \quad P(\mathbb{X} = 3) = \frac{6}{20} = 0.30,$$
$$P(\mathbb{X} = 4) = \frac{4}{20} = 0.20, \quad P(\mathbb{X} = 5) = \frac{2}{20} = 0.10, \quad , P(\mathbb{X} = 6) = \frac{1}{20} = 0.05.$$

Dále tedy v této úloze budeme používat symbol $\mathbb{X}$ pro označení veličiny znamenající počet bodů z písemné práce, symbol x pro konkrétní hodnotu této veličiny a označení $P(\mathbb{X} = x) = p$ bude znamenat, že pravděpodobnost že veličina $\mathbb{X}$ je rovna konkrétnímu číslu x, má hodnotu p. Nalezené výsledky jsou shrnuty v Tabulce 1.2.

x	0	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(\mathbb{X} = x)$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.05	1

Tabulka 1.2: Pravděpodobnosti konkrétních hodnot veličiny $\mathbb{X}$

Přestože jsme v příkladu počítali pravděpodobnosti výskytu jednotlivých situací, podstata úlohy spočívá v něčem jiném - v zavedení a osvojení si názvosloví a symboliky používané v souvislosti s náhodnou veličinou. Zde symbol:

- $\mathbb{X}$ ... vyjadřuje označení konkrétní náhodné veličiny (v dalším textu budeme k označení náhodné veličiny používat právě tento font písma),
- x ... znamená konkrétní hodnotu veličiny $\mathbb{X}$, kterou jsme obdrželi při *realizaci* konkrétního náhodného pokusu,
- $P(\mathbb{X} = x)$ ... uvádí hodnotu pravděpodobnosti, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ při konkrétní realizaci náhodného pokusu nabude hodnotu x.

Úlohy k samostatnému procvičení

V následujících úlohách určete množinu M možných hodnot náhodné veličiny $\mathbb{X}$ a pokud je to ze zadání možné, vypočtěte hodnoty pravděpodobnostní funkce pro jednotlivé hodnoty x.

1.2. Náhodným pokusem je hod dvěma hracími kostkami. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hodnotu jedna, pokud na obou kostkách padla stejná čísla, a hodnotu nula, pokud padla různá čísla.

1.3. Náhodným pokusem je hod dvěma hracími kostkami. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je počet sudých čísel, která při jednom hodu padnou.

1.4. Náhodným pokusem je hod dvěma hracími kostkami. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je součet čísel, která při jednom hodu padnou.

Všimněte si, že ve všech třech předchozích úlohách byla náhodným pokusem stále stejná situace a pokaždé jsme dokázali náhodnou veličinu definovat různým způsobem. Ve všech těchto příkladech byste měli být schopni určit pravděpodobnostní funkci.

1.5. Náhodným pokusem je příchod na autobusovou zastávku a čekání na příjezd autobusu, který jezdí v pravidelných intervalech po 20 minutách . Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je doba, po kterou musíme čekat, než přijede autobus, na který čekáme.

1.6. Náhodným pokusem je příchod na autobusovou zastávku a čekání na příjezd autobusu. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je počet autobusů jiných linek, které zastavily na zastávce do příjezdu „našeho“ busu.

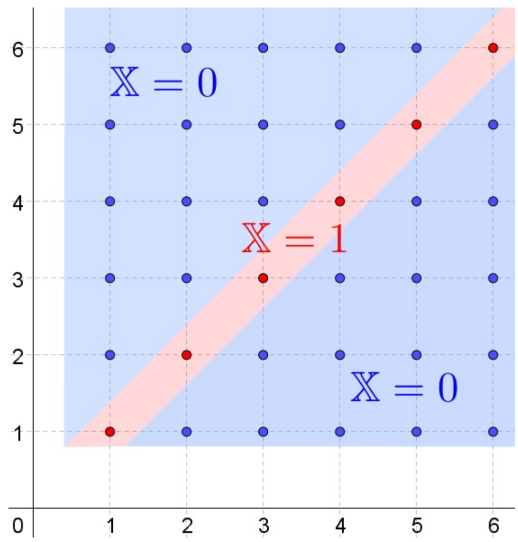
1.7. Náhodným pokusem je přejímka zboží. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je počet vadných kusů v zásilce.

1.8. Náhodným pokusem je přejímka zboží. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je celková hmotnost zásilky.

V předchozích úlohách se opět některé náhodné pokusy opakovaly a byli jsme schopni k nim stanovit různé náhodné veličiny. V posledních čtyřech příkladech máme málo informací k tomu, abychom určili pravděpodobnostní funkci. Všimněte si, že v Příkladech 1.5 a 1.8 množina M všech možných hodnot x veličiny $\mathbb{X}$ odpovídala intervalu reálných čísel, ve zbylých případech se množina M dala určit výčtem hodnot.

Definice 1.1.1. Mějme dán nějaký náhodný pokus a s ním spojený prostor všech elementárních jevů Ω. Vytvořme rozklad množiny Ω, tj. úplný systém náhodných jevů $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ tak, aby každému náhodnému jevu $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ bylo možné přiřadit jistou číselnou hodnotu. Tímto přiřazením čísla jednotlivým jevům jsme vytvořili tzv. *náhodnou veličinu.* Náhodná veličina je zobrazení podmnožin z daného rozkladu množiny Ω na množinu reálných čísel.

K ilustraci Definice 1.1.1 si ukažme toto zobrazení v případě náhodné veličiny z Příkladu 1.2. Množinu Ω zde tvoří všechny dvojice možných výsledků hodu dvěma kostkami. Bod na pozici $[2, 3]$ představuje ten výsledek náhodného pokusu, při kterém na první kostce padla dvojka a



Obrázek 1.1: Rozklad množiny Ω na úplný systém náhodných jevů v Příkladu 1.2

na druhé kostce trojka. Ze zadání je zřejmé, že prostor všech elementárních jevů tvoří celkem 36 prvků: $\Omega = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], \ldots [6, 5], [6, 6]\}$, kde ve výrazu $[x, y]$ symbol x znamená číslo padlé na první kostce, y znamená číslo padlé na druhé kostce. Množina Ω se nám rozpadne na dvě podmnožiny.

V první (na Obrázku 1.1 jsou body (spíše puntíky, ale to nechme stranou) reprezentující tuto podmnožinu vyznačeny červeným podbarvením a samotné body mají červenou barvu) se nacházejí prvky symbolizující případy, kdy na obou kostkách padla stejná čísla:

$$[1, 1],\ [2, 2],\ [3, 3],\ [4, 4],\ [5, 5],\ [6, 6],$$

pro které je $\mathbb{X} = 1$. Zbývající body představují případy, kdy na první kostce padlo jiné číslo než na druhé kostce. Ty mají modré podbarvení a body jsou na obrázku vyznačeny modrou barvou. Pro tyto modré body je $\mathbb{X} = 0$.

Volně řečeno – množina Ω se nám rozpadla na dvě části – modrou a červenou – kde modré přiřazujeme hodnotu $\mathbb{X} = 0$ a červené části přiřazujeme hodnotu $\mathbb{X} = 1$. Tolik tedy ke smyslu Definice 1.1.1.

1.1.1 Dělení na diskrétní a spojitou náhodnou veličinu

V následující části občas použijeme slovní spojení *spočetná množina*. O množině můžeme říci, že je spočetná, pokud lze prvkům této množiny přiřadit přirozená čísla tak, aby každý prvek množiny měl přiřazeno přirozené číslo a žádné přirozené číslo se přitom nepoužilo více než jednou. V podstatě jde o to, že spočetná množina je taková množina, ve které můžeme stanovit pořadí jejích prvků - toto je první prvek množiny, druhý prvek množiny, třetí prvek množiny, . . . Taková množina může mít nekonečně mnoho prvků - stejně jako množina všech přirozených čísel. Příkladem spočetných množin jsou např. množina všech sudých čísel, množina všech prvočísel atd. Na druhou stranu – ne každá množina s nekonečně mnoha prvky je spočetná. Například jakýkoli neprázdný interval reálných čísel je nespočetná množina.

Náhodné veličiny můžeme dle charakteru jejich hodnot dělit dva základní typy:

- *diskrétní* náhodná veličina (množina M je dána výčtem hodnot),
- *spojitá* náhodná veličina (množina M odpovídá intervalu reálných čísel).

Definice 1.1.2. Diskrétní náhodná veličina nabývá hodnoty pouze z konečné nebo spočetné množiny.

Příklady diskrétní náhodné veličiny:

- číslo padlé při hodu kostkou ... $M = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,
- počet zmetků vyrobených na výrobní lince za jednu hodinu ... $M = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$,
- počet prodaných novin ve stánku za jeden den ... $M = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$,
- počet bodů z písemky ze statistiky u náhodně vybraného studenta ... $M = \{0,\ 1,\ \ldots,\ 15\}$.

Definice 1.1.3. Spojitá náhodná veličina nabývá libovolnou hodnotu z konečného nebo nekonečného intervalu reálných čísel.

Příklady spojité náhodné veličiny:

- *doba* čekání na obsluhu ... $M = \langle 0, T\rangle$ (kde T je konstanta závislá na rychlosti obsluhy, resp. míře naší trpělivosti),
- *rozměr* náhodně vybrané součástky,
- *výdrž* baterie od posledního nabití,
- *hmotnost* náhodně vybraného člověka.

Úlohy k samostatnému procvičení

1.9. Vraťte se k Příkladu 1.2 až Příkladu 1.8 a rozhodněte, zda náhodné veličiny uvedené v těchto příkladech jsou diskrétní či spojité náhodné veličiny.

1.10. Náhodným pokusem je prodej jahod balených v košíku. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je hmotnost jahod v jednom prodaném košíku. Rozhodněte o typu (diskrétní $\times$ spojitá) náhodné veličiny.

1.11. Náhodným pokusem je prodej jahod balených v košíku. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je množství jahod v jednom prodaném košíku. Rozhodněte o typu náhodné veličiny.

1.12. Náhodným pokusem je prodej a nákup akcií na burze. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je cena jedné akcie konkrétní firmy na konci obchodního dne. Rozhodněte o typu náhodné veličiny.

1.1.2 Zákon rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny

V této kapitole se vrátíme k příkladu, který použila dr. Šimsová ve videopřednášce a budeme demonstrovat zákon rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny.

Již víme, že jevy, které tvoří rozklad množiny Ω, jsou navzájem neslučitelné. Pro pravděpodobnost jejich sjednocení platí

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Sjednocení všech jevů, které tvoří rozklad množiny Ω, je rovno přímo množině Ω a víme, že $P(\Omega) = 1$ (jedná se o jistý jev).

Věta 1.1.4. Zákon rozdělení pravděpodobnosti *diskrétní náhodné veličiny* $\mathbb{X}$ *říká*

$$\sum_{i \in I} P(A_i) = \sum_{x_i \in M} P(\mathbb{X} = x_i) = 1. \tag{1.1}$$

1.13. Náhodným pokusem je hod dvěma kostkami. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je počet šestek, které při hodu padly. Určeme možné hodnoty náhodné veličiny $\mathbb{X}$ a pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $\mathbb{X}$. Ověřme zákon rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny.

Řešení: Množinu Ω nyní znázorníme dalším možným způsobem – jako uspořádané dvojice čísel v Tabulce 1.3, kde první hodnota říká jaké číslo padlo na první kostce a druhá hodnota uvádí jaké číslo padlo na druhé kostce. Množina Ω se nyní rozpadla na tři části, které jsme barevně

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Tabulka 1.3: Zobrazení výsledků hodu dvěma kostkami

zvýraznili. Červeným písmem jsou vyznačeny ty případy, kdy je $\mathbb{X} = 0$, zeleným písmem jsou vyznačeny ty případy, kdy je $\mathbb{X} = 1$ a modrým písmem je vyznačen případ $\mathbb{X} = 2$. Množina M možných hodnot náhodné veličiny má tři prvky a platí $M = \{0,\ 1,\ 2\}$. Vzhledem k počtu jednotlivých případů v Tabulce 1.3 snadno odvodíme následující pravděpodobnosti.

$A_1 \ldots$ nehozena ani jedna šestka $\ldots$ $\mathbb{X} = 0$ $\ldots$ $P(\mathbb{X} = 0) = 25/36$

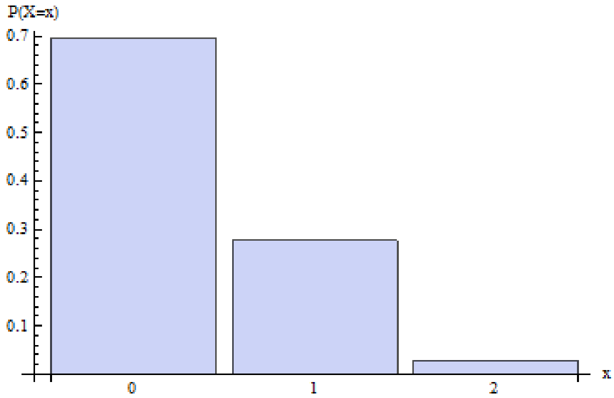
$A_2 \ldots$ hozena jedna šestka $\ldots$ $\mathbb{X} = 1$ $\ldots$ $P(\mathbb{X} = 1) = 10/36$

$A_3 \ldots$ hozeny dvě šestky $\ldots$ $\mathbb{X} = 2$ $\ldots$ $P(\mathbb{X} = 2) = 1/36$

Nyní ověříme, zda platí zákon rozdělení pravděpodobnosti (což je nadsázka – víme, že platí). Je

$$\sum_{x_i \in M} P(\mathbb{X} = x_i) = P(\mathbb{X} = 0) + P(\mathbb{X} = 1) + P(\mathbb{X} = 2) = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1.$$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny můžeme znázornit graficky, viz Obrázek 1.2. Na vodorovné ose leží hodnoty x, na svislé ose nanášíme pravděpodobnosti jednotlivých hodnot x. Zde je $\frac{25}{36} \doteq 0.69$, $\frac{10}{36} \doteq 0.28$ a $\frac{1}{36} \doteq 0.03$. Vzhledem k tomu, že šířka jednotlivých sloupců je rovna jedné, je součet obsahů vyznačených obdélníků roven jedné.



Obrázek 1.2: Rozdělení pravděpodobnosti mezi jednotlivé hodnoty náhodné veličiny $\mathbb{X}$

1.2 Charakteristiky náhodné veličiny

1.2.1 Modus (modální hodnota) náhodné veličiny

Definice 1.2.1. Nejpravděpodobnější hodnotu náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazýváme *modus* náhodné veličiny $\mathbb{X}$. Je to hodnota x náhodné veličiny $\mathbb{X}$, která má nejvyšší pravděpodobnost, že nastane.

1.14. Určíme modus náhodné veličiny uvedené v Příkladu 1.13.

Řešení: K určení modální hodnoty potřebujeme znát pravděpodobnosti jednotlivých hodnot náhodné veličiny. Tyto určíme z pravděpodobnostní funkce $P(\mathbb{X} = x)$, krátce $P(x)$. Víme, že platí

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \begin{cases} \dfrac{25}{36} & \dots \quad x = 0, \\ \dfrac{10}{36} & \dots \quad x = 1, \\ \dfrac{1}{36} & \dots \quad x = 2, \\ 0 & \dots \quad \text{pro zbývající hodnoty } x. \end{cases}$$

Porovnáním hodnot pravděpodobností vidíme, že nejvyšší pravděpodobnost nastává pro $x = 0$, proto je modální hodnotou náhodné veličiny číslo nula, tj. $\widehat{x} = 0$.

Úlohy k samostatnému řešení

1.15. Vypočtěte modální hodnotu pro náhodnou veličinu uvedenou v Příkladu 1.2 na straně 3.

1.16. Vypočtěte modální hodnotu pro náhodnou veličinu uvedenou v Příkladu 1.3 na straně 3.

1.17. Vypočtěte modální hodnotu pro náhodnou veličinu uvedenou v Příkladu 1.4 na straně 3.

1.2.2 Distribuční funkce náhodné veličiny

Definice 1.2.2. *Distribuční funkce* $F(x)$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ uvádí, jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ nabude hodnotu nejvýše x, tj.

$$F(x) = P(\mathbb{X} \leq x).$$

1.18. Nalezneme předpis distribuční funkce pro náhodnou veličinu z Příkladu 1.13.

Řešení: Použijeme výsledky dané úlohy. Víme, že pravděpodobnost je nenulová pouze v hodnotách $x = 0$, $x = 1$ a $x = 2$. To znamená, že například v případu $F(1,4) = P(\mathbb{X} \leq 1,4)$ můžeme započítat pouze ty hodnoty $x \leq 1,4$, které mají nenulovou pravděpodobnost. To jsou hodnoty $x = 0$ a $x = 1$. Proto

$$F(1,4) = P(\mathbb{X} \leq 1,4) = P(\mathbb{X} = 0) + P(\mathbb{X} = 1) = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} = \frac{35}{36}.$$

Mezi významné hodnoty distribuční funkce patří následující příklady.

$$\begin{aligned}
&F(x) = P(\mathbb{X} \leq x) \\
&F(0) = P(\mathbb{X} \leq 0) = P(0) = \frac{25}{36} \\
&F(1) = P(\mathbb{X} \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} = \frac{35}{36} \\
&F(2) = P(\mathbb{X} \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1
\end{aligned}$$

S uvážením výše uvedených poznámek dostáváme pro zadanou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ následující předpis distribuční funkce $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad x < 0 \\ \frac{25}{36} & \dots \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{35}{36} & \dots \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \dots \quad 2 \leq x \end{cases}$$

Úlohy k samostatnému řešení

1.19. Určete předpis distribuční funkce pro náhodnou veličinu uvedenou v Příkladu 1.2 na straně 3.

1.20. Určete předpis distribuční funkce pro náhodnou veličinu uvedenou v Příkladu 1.3 na straně 3.

1.21. Určete předpis distribuční funkce pro náhodnou veličinu uvedenou v Příkladu 1.4 na straně 3.

Následující úlohy jsou věnovány použití distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny při řešení slovních úloh.

1.22. Náhodným pokusem je výběr osoby v určité oblasti. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ představuje počet sourozenců této vybrané osoby. Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbb{X}$ je uvedeno v Tabulce 1.4. Určete předpis distribuční funkce této náhodné veličiny a vypočtěte pravděpodobnost, že počet sourozenců náhodně vybrané osoby je:

a) menší než 3,

x	0	1	2	3	4	Σ
$P(\mathbb{X} = x)$	0.34	0.46	0.10	0.07	0.03	1

Tabulka 1.4: Rozdělení pravděpodobností k Příkladu 1.22

b) nejvýše roven 3,

c) alespoň 3,

d) větší než 1 a menší než 4.

Řešení: Ze zadání příkladu plyne, že distribuční funkce bude své hodnoty měnit pouze pro $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ a $x = 4$, v ostatních hodnotách x je pravděpodobnost rovna nule. Proto například

$$F(2,7) = P(\mathbb{X} \leq 2,7) = P(\mathbb{X} = 0) + P(\mathbb{X} = 1) + P(\mathbb{X} = 2) = 0,34 + 0,46 + 0,10 = 0,90.$$

Pro předpis $F(x)$ tak platí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad x < 0 \\ 0.34 & \dots \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.80 & \dots \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.90 & \dots \quad 2 \leq x < 3 \qquad \dots \quad \text{a proto } F(2,7) = 0,90 \\ 0.97 & \dots \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & \dots \quad 4 \leq x \end{cases}$$

Dále se budeme věnovat podúlohám a) až d).

a) Pravděpodobnost, že počet sourozenců $\mathbb{X}$ náhodně vybrané osoby je menší než 3 znamená $P(\mathbb{X} < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,34 + 0,46 + 0,10 = 0,90$.

b) Pro pravděpodobnost, že počet sourozenců $\mathbb{X}$ je nejvýše roven 3, platí následující rovnosti $P(\mathbb{X} \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0,34 + 0,46 + 0,10 + 0,07 = 0,97$.

c) Pro pravděpodobnost, že počet sourozenců $\mathbb{X}$ je roven alespoň 3, platí následující rovnosti $P(\mathbb{X} \geq 3) = P(3) + P(4) = 0,07 + 0,03 = 0,10$.

d) Pro pravděpodobnost, že počet sourozenců $\mathbb{X}$ je větší než 1 a současně menší než 4, platí $P(1 < \mathbb{X} < 4) = P(2) + P(3) = 0,10 + 0,07 = 0,17$.

1.23. Zjistěte, zda funkce $P(x)$ může být pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny $\mathbb{X}$, kde

a) $P(x) = 1/4$ pro $x = 0, 1, 2, 3$,

b) $P(x) = 1/3$ pro $x = 0, 1, 2, 3$,

c) $P(x) = x/4$ pro $x = 0, 1, 3$,

d) $P(x) = (x - 5)/10$ pro $x = 0, 5, 10, 15$,

e) $P(x) = x^2/10 \qquad$ pro $x = -1, 0, 3$.

Řešení: Při hledání odpovědí si musíme uvědomit, jaké podmínky musí splňovat funkce, aby mohla být pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny.

- Pravděpodobnosti všech hodnot veličiny $\mathbb{X}$ musí ležet v rozmezí od nuly (včetně) do jedné (včetně), tj. $0 \leq P(x) \leq 1$ – viz definice pojmu pravděpodobnost.
- Součet pravděpodobností všech hodnot musí být roven jedné – viz zákon rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny. Zde stačí sečíst pouze pravděpodobnosti, které jsou nenulové – ty nulové do součtu ničím nepřispějí.

V dalších krocích proto budeme ověřovat tyto podmínky a pokud je předpis funkce takový, že s těmito podmínkami není v rozporu, budeme jej považovat za možnou pravděpodobnostní funkci.

a) Předpis funkce lze „přeložit do češtiny“ tímto způsobem. Možné hodnoty náhodné veličiny jsou pouze čísla $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ a $x = 3$ a pravděpodobnost každé této hodnoty je rovna $\frac{1}{4}$. Pravděpodobnosti pro ostatní hodnoty x jsou rovny nule. První podmínka je splněna. Pro ověření druhé podmínky sečteme všechny nenulové pravděpodobnosti. Je $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Druhá podmínka je také splněna a uvedená funkce může být pravděpodobnostní funkcí.

b) Nyní jsou možné hodnoty náhodné veličiny opět pouze čísla $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ a $x = 3$ a pravděpodobnost každé této hodnoty je rovna $\frac{1}{3}$, v ostatních případech je pravděpodobnost rovna nule. První podmínka je splněna – hodnoty pravděpodobností jsou v rozmězí od nuly do jedné. Druhou podmínku ověříme sečtením nenulových pravděpodobností. Je

$$\sum_{x \in M} P(x) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \neq 1.$$

Součet pravděpodobností vyšel vyšší než jedna, druhá podmínka je porušena, a funkce proto nemůže být pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny.

c) Nyní jsou možné hodnoty náhodné veličiny pouze čísla $x = 0$, $x = 1$ a $x = 3$. Pravděpodobnost každé této hodnoty závisí na hodnotě x podle vzorce $P(x) = \frac{x}{4}$. Proto je $P(0) = \frac{0}{4} = 0$, $P(1) = \frac{1}{4}$ a $P(3) = \frac{3}{4}$, v ostatních případech je pravděpodobnost rovna nule (a pro $x = 0$ vlastně také). První podmínka je splněna – pravděpodobnosti všech hodnot x leží v rozmezí od nuly do jedné. K ověření druhé podmínky sečteme nenulové pravděpodobnosti. Je

$$\sum_{x \in M} P(x) = P(1) + P(3) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Druhá podmínka je také splněna, funkce může být pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny.

d) Možné hodnoty náhodné veličiny jsou čísla $x = 0$, $x = 5$, $x = 10$ a $x = 15$. Pravděpodobnost každé této hodnoty závisí na hodnotě x podle vzorce $P(x) = \frac{x-5}{10}$. Proto je $P(0) = \frac{0-5}{10} =$

$-\frac{1}{2}$, $P(5) = \frac{5-5}{10} = 0$, $P(10) = \frac{10-5}{10} = \frac{1}{2}$ a $P(15) = \frac{15-5}{10} = 1$, v ostatních případech (a pro $x = 5$) je pravděpodobnost rovna nule. Pravděpodobnost hodnoty $x = 0$ nám vyšla záporná, je $P(0) = -\frac{1}{2}$, proto první podmínka není splněna a funkce nemůže být funkcí pravděpodobnosti. Toto platí dokonce přesto, že součet pravděpodobností je roven jedné, viz

$$\sum_{x \in M} P(x) = P(0) + P(10) + P(15) = \frac{-5}{10} + \frac{5}{10} + \frac{10}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

Funkce proto není pravděpodobnostní funkcí.

e) Možné hodnoty náhodné veličiny jsou čísla $x = -1$, $x = 0$ a $x = 3$. To, že jedna z hodnot je záporná, nevadí – problémem by bylo, kdyby její pravděpodobnost vycházela záporná. Dosazením do vzorce pro pravděpodobnost dostaneme $P(-1) = \frac{(-1)^2}{10} = \frac{1}{10}$, $P(0) = \frac{0^2}{10} = 0$ a $P(3) = \frac{3^2}{10} = \frac{9}{10}$; pravděpodobnosti zbývajících hodnot jsou rovny nule. Pravděpodobnosti všech hodnot jsou v rozmezí od nuly do jedné, proto je první podmínka splněna. Druhou podmínku ověříme součtem nenulových pravděpodobností. Je

$$\sum_{x \in M} P(x) = P(-1) + P(3) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1.$$

Součet pravděpodobností je roven jedné, druhá podmínka je splněna a funkce může být pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny.

1.2.3 Momentové charakteristiky náhodné veličiny

V této části si připomeneme a procvičíme pojmy obecný moment k-tého řádu a centrovaný moment k-tého řádu (viz videopřednáška dr. Šimsové Diskrétní náhodná veličina 2 od času cca 5:22).

Definice 1.2.3. Pro diskrétní náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s možnými hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a jejich pravděpodobnostmi $p_i = P(x_i) = P(\mathbb{X} = x_i)$ definujeme k-tý obecný moment vztahem

$$m_0^k = \sum_{x_i \in M} x_i^k \cdot P(x_i).$$

Velmi používaným obecným momentem je *první obecný moment*, kterému častěji říkáme *střední hodnota* a místo označení m_0^1 používáme k jeho označení symbol μ. Setkat se také můžeme s označením $E(\mathbb{X})$ a názvem *očekávaná hodnota* (z anglického výrazu *expected value*), viz následující definice.

Definice 1.2.4. Pro diskrétní náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s možnými hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a jejich pravděpodobnostmi $p_i = P(x_i) = P(\mathbb{X} = x_i)$ definujeme střední hodnotu $E(\mathbb{X})$ vztahem

$$E(\mathbb{X}) = \mu = \sum_{x_i \in M} x_i \cdot P(x_i). \tag{1.2}$$

Střední hodnotu náhodné veličiny $\mathbb{X}$ lze chápat jako teoretickou hodnotu, která předpovídá průměr z realizací náhodné veličiny při dostatečně vysokém počtu opakování příslušného náhodného pokusu – v tom smyslu, že čím více pokusů proběhlo, tím více se průměr z realizací náhodné veličiny blíží střední hodnotě této veličiny. Tuto poznámku upřesníme po výkladu tzv. *limitních vět* a jejich souvislostí v některé z následujících přednášek.

1.24. Náhodným pokusem je hod *spravedlivou* kostkou. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je číslo, které na kostce padlo při tomto hodu. Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Řešení: Možné hodnoty $\mathbb{X}$ jsou čísla padlá na kostce, je tedy množina všech hodnot náhodné veličiny $\mathbb{X}$ rovna $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Předpokládáme, že kostka je *spravedlivá*, tj. všechny hodnoty padají se stejnou pravděpodobností, a platí

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

Dosazením do vzorce (1.2) dostaneme

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) = \mu = \sum_{x_i \in M} x_i \cdot P(x_i) &= x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \ldots + x_6 \cdot P(x_6) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} \\ &= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5. \end{aligned}$$

Střední hodnota vyšla $\mu = 3,5$, což je v souladu s naším očekáváním. Při dostatečném počtu opakování hodů totiž můžeme očekávat přibližně stejný počet jedniček, dvojek, trojek, ..., šestek a průměr z těchto hodnot bude blízký číslu 3,5 (vypočtěte si průměr z hodnot $1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Podobně jako pro první obecný moment náhodné veličiny máme speciální označení i pro druhý obecný moment náhodné veličiny, viz definice .

Definice 1.2.5. Pro diskrétní náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s možnými hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a jejich pravděpodobnostmi $p_i = P(x_i) = P(\mathbb{X} = x_i)$ definujeme druhý obecný moment $E(\mathbb{X}^2)$ vztahem

$$E(\mathbb{X}^2) = \sum x_i^2 \cdot P(x_i). \tag{1.3}$$

Kromě obecných momentů pracujeme i s tzv. centrovanými momenty náhodné veličiny. Připomeneme obecnou definici centrovaného momentu k-tého řádu a pak se budeme věnovat nejdůležitějšímu z centrovaných momentů – centrovanému momentu druhého řádu – tzv. *rozptylu*, pro který používáme označení $D(\mathbb{X})$ nebo σ^2.

Definice 1.2.6. Pro diskrétní náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s možnými hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a jejich pravděpodobnosti $p_i = P(x_i) = P(\mathbb{X} = x_i)$ definujeme k-tý centrovaný moment vztahem

$$m_c^k = \sum_{x_i \in M} \left[x_i - E(\mathbb{X})\right]^k \cdot P(x_i) = E\Big(\left[\mathbb{X} - E(\mathbb{X})\right]^k\Big). \tag{1.4}$$

Z Definice 1.2.6 plyne, že při výpočtu centrovaných momentů již musíme znát střední hodnotu $E(\mathbb{X})$. Každou hodnotu x pak snížíme o hodnotu $E(\mathbb{X})$, tento rozdíl umocníme na k-tou mocninu, tuto mocninu vynásobíme pravděpodobností hodnoty x. Tyto operace provedeme se všemi hodnotami x a výsledky sečteme. Konkrétní způsob výpočtu si ukážeme na případě druhého centrovaného momentu – rozptylu.

Definice 1.2.7. Pro diskrétní náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s možnými hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a jejich pravděpodobnosti $p_i = P(x_i) = P(\mathbb{X} = x_i)$ definujeme rozptyl $D(\mathbb{X})$, resp. σ^2 vztahem

$$m_c^2 = D(\mathbb{X}) = \sigma^2 = \sum_{x_i \in M} \big[x_i - E(\mathbb{X})\big]^2 \cdot P(x_i) = E\Big(\big[\mathbb{X} - E(\mathbb{X})\big]^2\Big). \tag{1.5}$$

1.25. Náhodným pokusem je hod *spravedlivou* kostkou. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je číslo, které na kostce padlo při tomto hodu. Vypočtěte rozptyl zadané náhodné veličiny.

Řešení: Navážeme na řešení Příkladu 1.24, ve kterém jsme pro tuto náhodnou veličinu vypočítali střední hodnotu $E(\mathbb{X}) = 3,5$. Ve vzorci (1.5) tak místo výrazu $E(\mathbb{X})$ můžeme uvažovat hodnotu $3,5$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned}
D(\mathbb{X}) = \sigma^2 &= \sum_{x_i \in M} \big[x_i - E(\mathbb{X})\big]^2 \cdot P(x_i) \\
&= \sum_{x_i \in M} \big[x_i - 3,5)\big]^2 \cdot P(x_i) \\
&= (1-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \\
&\quad + (5-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\
&= (-2,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-0,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (0,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2,5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\
&= 6,25 \cdot \frac{1}{6} + 2,25 \cdot \frac{1}{6} + 0,25 \cdot \frac{1}{6} + 0,25 \cdot \frac{1}{6} + 2,25 \cdot \frac{1}{6} + 6,25 \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{6,25}{6} + \frac{2,25}{6} + \frac{0,25}{6} + \frac{0,25}{6} + \frac{2,25}{6} + \frac{6,25}{6} = \frac{17,5}{6} = \frac{35}{12} = 2,91\overline{6} \doteq 2,92.
\end{aligned}$$

Výpočet rozptylu lze zjednodušit použitím následující věty.

Věta 1.2.8. *Pro diskrétní náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ se střední hodnotou $E(\mathbb{X})$ a druhým obecným momentem $E(\mathbb{X}^2)$ lze rozptyl $D(\mathbb{X})$ vypočítat pomocí vztahu*

$$D(\mathbb{X}) = \sigma^2 = E(\mathbb{X}^2) - [E(\mathbb{X})]^2. \tag{1.6}$$

Použití Věty 1.2.8 si ukážeme novým výpočtem rozptylu náhodné veličiny ze zadání z Příkladu 1.25.

1.26. Náhodným pokusem je hod *spravedlivou* kostkou. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je číslo, které na kostce padlo při tomto hodu. Vypočtěte rozptyl zadané náhodné veličiny pomocí vzorce (1.6).

Řešení: Již víme, že zadaná náhodná veličina má střední hodnotu $E(\mathbb{X}) = 3,5$. Pro dosazení do vzorce (1.6) budeme potřebovat druhý obecný moment. Podle vzorce (1.3) platí

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{X}^2) &= \sum_{x_i \in M} x_i^2 \cdot P(x_i) \\
&= x_1^2 \cdot P(x_1) + x_2^2 \cdot P(x_2) + x_3^2 \cdot P(x_3) + x_4^2 \cdot P(x_4) + x_5^2 \cdot P(x_5) + x_6^2 \cdot P(x_6) \\
&= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6}.
\end{aligned}$$

Nyní již víme, že $E(\mathbb{X}) = 3,5 = \frac{7}{2} = \frac{21}{6}$ a $E(\mathbb{X}^2) = \frac{91}{6}$ a můžeme dosadit do vzorce (1.6).

$$D(\mathbb{X}) = \sigma^2 = E(\mathbb{X}^2) - [E(\mathbb{X})]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546}{36} - \frac{441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12}.$$

Výsledek $D(\mathbb{X})$ vyšel v obou případech (Příklad 1.25 i Příklad 1.26) stejně a hodnota rozptylu je rovna $D(\mathbb{X}) = \frac{35}{12}$.

Další významnou statistickou veličinou je *směrodatná odchylka* náhodné veličiny. Její definice vychází z veličiny rozptyl, viz následující definice.

Definice 1.2.9. *Směrodatná odchylka* σ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ je definována jako odmocnina z rozptylu této náhodné veličiny, tedy

$$\sigma = \sqrt{D(\mathbb{X})}. \tag{1.7}$$

1.27. Náhodným pokusem je hod *spravedlivou* kostkou. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je číslo, které na kostce padlo při tomto hodu. Vypočtěte směrodatnou odchylku zadané náhodné veličiny.

Řešení: Vyjdeme z již známých výsledků. Víme, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozptyl $D(\mathbb{X}) = \frac{35}{12}$. Použitím vzorce (1.7) dostaneme

$$\sigma = \sqrt{D(\mathbb{X})} = \sqrt{\frac{35}{12}} = \sqrt{2,91\overline{6}} \doteq 1,71.$$

Směrodatná odchylka náhodné veličiny $\mathbb{X}$ je rovna $\sigma \doteq 1,71$.

1.28. Obsluha nápojového automatu potřebuje zjistit, jak často má doplňovat jistý druh nápoje v daném automatu. Na základě minulých údajů o prodeji odhadla obsluha automatu následující pravděpodobnostní rozdělení veličiny $\mathbb{X}$, kde náhodná veličina $\mathbb{X}$ znamená počet lahví daného

x	15	16	17	18	19	20	$\sum$
$P(x)$	0.10	0.15	0.30	0.20	0.15	0.10	1

Tabulka 1.5: Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $\mathbb{X}$: počet prodaných lahví denně

nápoje prodaných za jeden den, viz Tabulka 1.5. Vypočtěte střední hodnotu počtu prodaných lahví nápoje za jeden den a rozptyl této veličiny.

Řešení: Nejprve vypočteme střední hodnotu. Jsou známy hodnoty x i jejich pravděpodobnosti $P(x)$, proto můžeme přímo dosadit do vzorce (1.2).

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \sum_{x_i \in M} x_i \cdot P(x_i) \\ &= 15 \cdot 0,10 + 16 \cdot 0,15 + 17 \cdot 0,30 + 18 \cdot 0,20 + 19 \cdot 0,15 + 20 \cdot 0,10 \\ &= 17,45 \end{aligned}$$

Střední hodnota počtu prodaných lahví denně vyšla rovna 17,45 lahví/den.

Rozptyl náhodné veličiny vypočteme ze vzorce (1.5). K tomu potřebujeme vypočítat hodnotu $E(\mathbb{X}^2)$. K výpočtu $E(\mathbb{X}^2)$ použijeme rovnici (1.3). Tím dostaneme

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{X}^2) &= \sum_{x_i \in M} x_i^2 \cdot P(x_i) \\
&= 15^2 \cdot 0,10 + 16^2 \cdot 0,15 + 17^2 \cdot 0,30 + 18^2 \cdot 0,20 + 19^2 \cdot 0,15 + 20^2 \cdot 0,10 \\
&= 306,55
\end{aligned}$$

Nyní již můžeme dosadit do vzorce (1.5). Je

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - [E(\mathbb{X})]^2 = 306.55 - (17.45)^2 = 2,0475.$$

náhodné veličiny $\mathbb{X}$ je roven přibližně $D(\mathbb{X}) = 2,05$.

Ze známého rozptylu náhodné veličiny můžeme vypočítat také směrodatnou odchylku náhodné veličiny

$$\sigma = \sqrt{D(\mathbb{X})} = \sqrt{2,0475} \doteq 1,431.$$

Směrodatná odchylka náhodné veličiny $\mathbb{X}$ je rovna přibližně $\sigma = 1,43$.

Komentář k výsledkům úlohy Můžeme si samozřejmě klást otázku, k čemu nám vypočtené hodnoty „jsou“, tj. jaké je použití hodnot $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$, resp. σ.

Význam střední hodnoty $E(\mathbb{X})$, resp. μ, spočívá v odhadu, jaké je průměrné množství prodaných lahví za den. Pak můžeme přibližně odvozovat počty prodaných lahví za dva dny $(2 \cdot \mu)$, za týden $(7 \cdot \mu)$, měsíc $(30 \cdot \mu)$ atd. Odtud pravděpodobně plyne ekvivalentní název *očekávaná hodnota*. O tom, jak blízko budou tyto odhady skutečným realizacím náhodné veličiny nám podávají informaci hodnoty $D(\mathbb{X})$, resp. σ. Asi tušíte, že čím nižší budou obě hodnoty $D(\mathbb{X})$ a σ, tím více se skutečné realizace náhodné veličiny za dva dny, za týden, měsíc atd. budou blížit vypočteným hodnotám. Více se k tématu dozvíte po výkladu tzv. limitních vět a jejich souvislostí.

1.29. Předpokládejme hypotetickou situaci, při které hráč sází při ruletě 100 Kč stále na černou barvu. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ představuje velikost jeho výhry v každé kole hry. Vypočtěte střední hodnotu $E(\mathbb{X})$, rozptyl $D(\mathbb{X})$ a směrodatnou odchylku σ této náhodné veličiny. Interpretujte výslednou hodnotu střední hodnoty této náhodné veličiny.

Řešení: Připomeňme relevantní informace k hře *ruleta*. Hru řídí krupiér, který roztočí hrací kolo s očíslovanými přihrádkami a v protisměru otáčení kola do něj vhodí hrací kuličku. Ta obíhá po obvodu kola až se její rychlost třením sníží natolik, že kulička spadne do některé z očíslovaných přihrádek v prostřední části hracího kola. Těchto přihrádek je (v tzv. evropské verzi rulety) celkem 37 a jsou očíslovány čísly od 0 do 36. Přihrádka s číslem 0 má zelenou barvu. Přihrádky s čísly od 1 do 36 mají víceméně střídavě červenou a černou barvu; podle toho, jakou barvu má přihrádka, do které padla kulička, říkáme, že padla červená, černá nebo zelená barva. Upřesněme, že červených přihrádek je 18, černých přihrádek je také 18.

Jednou ze sázek, které hráč provádí, může být sázka na barvu, která padne. V takovém případě hráč položí na hrací plán obnos symbolizující výši sázky na pole s červenou nebo černou barvou (poznámka: na zelenou barvu se nesází – této situaci odpovídá sázka na padnutí čísla 0). Pokud hráč uhodne barvu, krupiér mu vrátí jeho vklad a navíc přidá výhru ve výši hráčova vkladu. Pokud hráč barvu neuhodl, krupiér si vezme z hracího plánu hráčův vklad a věnuje mu maximálně lítostivý úsměv. Ve skutečnosti navíc hra probíhá tak, že hráči místo s penězi hrají pomocí žetonů s jistou peněžní hodnotou a krupiér má profesionálně neutrální výraz ve tváři.

Nyní již máme dostatek informací k tomu, abychom mohli úlohu řešit. Připomeňme, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ představuje velikost výhry hráče v každé kole hry.

Uvažujme situaci, kdy hráč má před zahájením hry hotovost ve výši 1 000 Kč. Vsadí 100 Kč, v tu chvíli má u sebe hotovost ve výši 900 Kč. Pokud vyhraje, krupiér mu vrátí vklad 100 Kč a navrch přidá dalších 100 Kč jako výhru. V takové situaci má hráč po vyplacení sázek hotovost ve výši 1 100 Kč a jeho výhra činí 100 Kč. Pokud hráč prohraje, krupiér si vezme jeho sázku a nic mu nedá. V takové situaci má hráč po vyplacení sázek hotovost 900 Kč a jeho „výhra“ činí -100 Kč.

Možné hodnoty náhodné veličiny $\mathbb{X}$ proto jsou -100, nebo 100. Předpokládáme, že ruleta je spravedlivá, tj. každé číslo má stejnou šanci na padnutí. Hráč vyhraje 100 Kč, pokud padne některé z 18 černých čísel z celkového počtu 37 čísel. Pravděpodobnost výhry je rovna

$$P(\mathbb{X} = 100) = \frac{18}{37}.$$

Hráč prohraje, pokud mu padne některé ze zbývajících 19 čísel (1 zelené a 18 červených). Pravděpodobnost prohry, tj. výhry -100 Kč, je

$$P(\mathbb{X} = -100) = \frac{19}{37}.$$

Pravděpodobnostní funkce tedy má předpis

$$P(x) = \begin{cases} \frac{19}{37}, & \dots \quad x = -100, \\ \frac{18}{37}, & \dots \quad x = 100. \end{cases}$$

Známe-li pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny, můžeme vypočítat její charakteristiky.

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \sum_{x_i \in M} x_i \cdot P(x_i) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) = (-100) \cdot \frac{19}{37} + 100 \cdot \frac{18}{37} \\ &= -\frac{1900}{37} + \frac{1800}{37} = -\frac{100}{37} \doteq -2,7. \end{aligned}$$

Střední hodnota (očekávaná hodnota) nám vyšla $E(\mathbb{X}) = -2,7$. Tuto hodnotu můžeme interpretovat jako částku, kterou hráč průměrně v každém kole hry „vyhrává“. Jinými slovy, hráč průměrně při každém kole hry ztrácí 2,7 Kč. Další výpočty jsou následující.

$$E(\mathbb{X}^2) = \sum_{x_i \in M} x_i^2 \cdot P(x_i) = (-100)^2 \cdot \frac{19}{37} + 100^2 \cdot \frac{18}{37} = \frac{190\,000}{37} + \frac{180\,000}{37} = \frac{370\,000}{37} = 10\,000$$

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - \big[E(\mathbb{X})\big]^2 = 10\,000 - (-2,7)^2 = 10\,000 - 7,29 = 9\,992,71$$

$$\sigma = \sqrt{D(\mathbb{X})} = \sqrt{9\,992,71} \doteq 99,96$$

Směrodatná odchylka vyšla násobně větší než je střední hodnota. To ukazuje na značnou variabilitu možných výsledků a díky tomu se může stát, že občas některý hráč „skončí v plusu“. Je nutné však mít na paměti, že častěji vyhrává kasino.

1.2.4 Shrnutí kapitoly - úlohy k samostatnému řešení

1.30. Určete, které z následujících náhodných veličin jsou diskrétní, resp. spojité.

- Počet vadných výrobků v balení 24 ks.
- Počet bodů, které získá FK Teplice na konci soutěžního ročníku.
- Doba trvání cvičení ze statistiky.
- Počet zákazníků, kteří přijdou k pokladně v supermarketu během jedné hodiny.
- Hmotnost dataprojektoru v této místnosti.
- Počet správně určených odpovědí v tomto cvičení.
- Doba strávená čekáním „na zelenou u semaforu“ od doby zastavení u semaforu po naskočení zelené na semaforu.

1.31. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ představuje počet padlých šestek při hodu třemi kostkami. Určete pravděpodobnostní funkci a distribuční funkci této náhodné veličiny.

1.32. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ představuje počet padlých šestek při hodu třemi kostkami. Stanovte střední hodnotu $E(\mathbb{X})$, rozptyl $D(\mathbb{X})$ a směrodatnou odchylku σ této náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

1.33. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ představuje počet novinových titulů, které si náhodně vybraný zákazník zakoupí v novinovém stánku. Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbb{X}$ je uvedeno v tabulce. Určete pravděpodobnost, že počet zakoupených titulů u náhodně vybraného zákazníka je

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.3	0.5	0.15	0.1	0.05

- větší než dva,
- nejvýše roven dvěma,
- alespoň dva,
- větší než jedna a menší než tři.

1.34. Vypočtěte střední hodnotu $E(\mathbb{X})$, rozptyl $D(\mathbb{X})$ a směrodatnou odchylku σ náhodné veličiny z Příkladu 1.32.

1.35. Náhodná veličina představuje počet hodů kostkou do doby, než padne šestka. Zapište pravděpodobnostní funkci této veličiny a vypočtěte střední hodnotu $E(\mathbb{X})$, rozptyl $D(\mathbb{X})$ a směrodatnou odchylku σ této náhodné veličiny.

1.3 Důležitá rozdělení diskrétní náhodné veličiny

1.3.1 Binomické rozdělení

Nyní se budeme věnovat jednomu z nejdůležitějších typů diskrétní náhodné veličiny – náhodné veličině s *binomickým rozdělením* pravděpodobnosti. Před vyslovením definice uvedeme několik ilustračních příkladů, které by měly pomoci rozeznat tento typ náhodné veličiny.

Na úvod uvažujme následující situaci. Náhodným pokusem je hod kostkou a náhodný jev A nastane, pokud při tomto hodu padne šestka. Snadno odvodíme, že pravděpodobnost jevu je rovna $P(A) = \frac{1}{6}$. Nyní provedeme 10 hodů kostkou a při každém hodu sledujeme, zda nastal jev A, resp. kolikrát jev A během oněch 10 hodů nastal, tj. kolik šestek padlo během deseti hodů kostkou. Může se stát, že šestka nepadla ani jednou (tj. počet případů, kdy nastal jev A je roven nule), může se také stát, že šestka během deseti pokusů padla například dvakrát (pak je počet případů, kdy nastal jev A roven dvěma). Pro těchto 10 hodů kostkou tak můžeme zavést náhodnou veličinu $\mathbb{X}$, jejíž hodnoty odpovídají počtu padlých šestek při deseti hodech, tj. odpovídají počtu případů, ve kterých nastal jev A. Možné hodnoty této náhodné veličiny jsou $M = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$.

Podobně můžeme uvažovat situaci, při které házíme mincí a sledujeme, zda padne rub či líc. Pokud padne rub, řekneme, že nastal jev A. Předpokládejme, že rub i líc mají stejnou šanci padnout, pak je pravděpodobnost padnutí rubu při jednom hodu rovna $P(A) = \frac{1}{2}$. Nyní budeme mincí házet dvacetkrát a budeme sledovat, kolikrát nastal jev A, tj. kolikrát padl rub. Opět můžeme zavést náhodnou veličinu $\mathbb{X}$, jejíž hodnoty říkají, kolikrát nastal jev A v sérii 20 náhodných pokusů, tj. kolik rubů padlo při dvaceti hodech mincí. Možné hodnoty této náhodné veličiny jsou $M = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ 19,\ 20\}$.

Předpokládejme, že jistý biatlonista při každém výstřelu zasáhne terč s pravděpodobností $p = 0,9$; tj. dlouhodobě má úspěšnost zásahu terče 90 %. Tento biatlonista přijede na střelnici a střílí pětkrát na terč. Sledujeme, kolikrát se při těchto pěti pokusech trefil do terče. Náhodnou veličinou bude počet úspěšných zásahů při pěti výstřelech na terč. Možné hodnoty této náhodné veličiny jsou $M = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

Všechny uvedené situace mají společný rys, který popíšeme v následující definici.

Definice 1.3.1. Předpokládejme, že při náhodném pokusu sledujeme jistý náhodný jev A, jehož pravděpodobnost označíme symbolem p. Je tedy $P(A) = p$. Uskutečníme-li tento náhodný pokus n-krát, pak počet případů, kdy nastane jev A je náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ s tzv. *binomickým rozdělením pravděpodobnosti.* Tuto náhodnou veličinu označujeme symbolem $\mathrm{Bi}(n, p)$, kde n a p jsou parametry tohoto rozdělení (n představuje počet opakování pokusu, p je pravděpodobnost nastání jevu A při jednom opakování pokusu).

Možné hodnoty náhodné veličiny jsou $M = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Pravděpodobnost, že náhodná věličina $\mathbb{X}$ nabude hodnotu x, tj. pravděpodobnost, že při n opakováních pokusu nastane jev A právě x-krát, je rovna:

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x}. \tag{1.8}$$

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s binomickým rozdělením pravděpodobnosti platí:

$$E(\mathbb{X}) = n \cdot p, \qquad D(\mathbb{X}) = n \cdot p \cdot (1-p). \tag{1.9}$$

1.36. Uvažujme běžný balíček s 32 hracími kartami (kde jsou 4 esa.) Z balíčku vybereme kartu, podíváme se, zda je to eso, a pak kartu vrátíme do balíčku a balíček poctivě zamícháme. Takto vybereme a vrátíme kartu celkem pětkrát. Náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ je počet případů, kdy vybranou kartou bylo eso. Vypočtěte hodnoty

a) $P(\mathbb{X} = 0) = P(0)$

b) $P(\mathbb{X} = 2) = P(2)$

Dále vypočtěte střední hodnotu $E(\mathbb{X})$ a rozptyl $D(\mathbb{X})$.

Řešení: Ze zadání plyne, že $\mathbb{X}$ je náhodná veličina s binomickým rozdělením pravděpodobnosti – jev A nastane, pokud vytáhneme eso; náhodný pokus opakujeme celkem pětkrát a pravděpodobnost jevu A je při každém opakování výběru stejná (jedná se o *výběr s vracením*). Je tedy

$$\begin{aligned} A &\quad \dots \quad \text{náhodný jev } \textit{výběr esa} \\ \mathbb{X} &\quad \dots \quad \text{náhodná veličina měřící } \textit{kolikrát nastal jev } A \\ n = 5 &\quad \dots \quad \text{počet opakování pokusu} \\ P(A) = p = \tfrac{4}{32} = \tfrac{1}{8} &\quad \dots \quad \text{pravděpodobnost výběru esa při každém tahu karty} \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (1.8) dostaneme

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$

Pro případ $x = 0$

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} = 0) = P(0) &= \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{5-0} \\ &= \frac{5!}{0!(5-0)!} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \left(\frac{7}{8}\right)^5 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0,875^5 \\ &\doteq 0,513 \end{aligned}$$

Pro případ $x = 2$

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} = 2) = P(2) &= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{5-2} \\ &= \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^3 \\ &= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0,125^2 \cdot 0,875^3 \\ &= 10 \cdot 0,015625 \cdot 0,669921875 \\ &\doteq 0,105 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že při výběru pěti karet s vracením nevytáhneme eso, je rovna přibližně $0,512$. Pravděpodobnost, že při výběru pěti s vracením vytáhneme eso dvakrát, je rovna přibližně $0,105$.

Pro střední hodnotu a rozptyl platí vztahy (1.9).

$$E(\mathbb{X}) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{8} = 0,625$$
$$D(\mathbb{X}) = n \cdot p \cdot (1-p) = 5 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 5 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{35}{64} \doteq 0,55$$

Poznamenejme, že hodnoty $E(\mathbb{X})$, resp. $D(\mathbb{X})$ lze vypočítat i podle vzorců (1.2.4), resp. (1.5), které jsme zavedli v Kapitole 1.2.3. Nicméně, zde použité vzorce jsou významně jednodušší k použití – není nutné vypočítávat pravděpodobnosti ke každé hodnotě $\mathbb{X}$.

1.37. Studenti píší písemku ve formě testu s 20 otázkami. U každé otázky jsou nabídnuty 4 možné odpovědi, z nichž právě jedna je správná. Jaká je pravděpodobnost, že student, který naprosto náhodně tipuje odpovědi, odpoví správně

a) právě tři otázky?

b) nejvýše tři otázky?

c) alespoň tři otázky?

Řešení: Odpověď na každou otázku představuje podle zadání náhodný pokus s možnými výsledky: student uhodne správnou odpověď, resp. student neuhodne správnou odpověď. Označme náhodným jevem A situaci, kdy student uhádne správnou odpověď. Pravděpodobnost jevu A je $p = \frac{1}{4}$. Odpovídání na 20 otázek představuje sérii 20 pokusů, při kterých sledujeme, zda nastal jev A – student vybral správnou odpověď. Počet správně zodpovězených otázek představuje náhodnou veličinu s binomickým rozdělením pravděpodobnosti s parametry $n = 20$ a $p = \frac{1}{4} = 0,25$, tedy $\mathbb{X} \approx \mathrm{Bi}\left(20, \frac{1}{4}\right)$. Dosazením do vzorce (1.8) dostaneme odpovědi na zadané otázky.

a) Student, který náhodně tipuje odpovědi, odpoví správně právě tři otázky pro $\mathbb{X} = 3$.

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X}=3) = P(3) &= \binom{20}{3} \cdot 0,25^3 \cdot (1-0,25)^{20-3} \\ &= \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{17} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{17} \\ &\doteq \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,015625 \cdot 0,007517 \doteq 1140 \cdot 0,00011745 \doteq 0,134 \end{aligned}$$

b) Student, který náhodně tipuje odpovědi, odpoví správně nejvýše tři otázky pro $\mathbb{X} \leq 3$.

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} \leq 3) &= P(\mathbb{X}=0) + P(\mathbb{X}=1) + P(\mathbb{X}=2) + P(\mathbb{X}=3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) \\ &= \binom{20}{0} \cdot 0,25^0 \cdot (1-0,25)^{20-0} + \binom{20}{1} \cdot 0,25^1 \cdot (1-0,25)^{20-1} + \\ &\quad + \binom{20}{2} \cdot 0,25^2 \cdot (1-0,25)^{20-2} + \binom{20}{3} \cdot 0,25^3 \cdot (1-0,25)^{20-3} \\ &= \frac{20!}{0! \cdot (20-0)!} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{20} + \frac{20!}{1! \cdot (20-1)!} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^{19} + \\ &\quad + \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{18} + \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{17} \\ &= 0,75^{20} + 20 \cdot 0,25 \cdot 0,75^{19} + 190 \cdot 0,25^2 + 1140 \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{17} \\ &\doteq 0,003 + 0,021 + 0,067 + 0,134 = 0,225 \end{aligned}$$

c) Student, který náhodně tipuje odpovědi, odpoví správně alespoň tři otázky pro $\mathbb{X} \geq 3$.

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} \geq 3) &= P(\mathbb{X} = 3) + P(\mathbb{X} = 4) + P(\mathbb{X} = 5) + \ldots + P(\mathbb{X} = 19) + P(\mathbb{X} = 20) \\ &= P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) + P(8) + \ldots + P(19) + P(20) \end{aligned}$$

Takový výpočet je neúměrně náročný, využijeme zákon o rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, viz Věta 1.1.4 na straně 6. Všechny možné hodnoty náhodné veličiny $\mathbb{X}$ jsou v tomto případě $M = \{0, 1, 2, \ldots, 19, 20\}$ a součet jejich pravděpodobností je podle uvedené věty roven jedné, tedy

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + \ldots + P(19) + P(20) = 1.$$

Z toho plyne vztah

$$P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) + \ldots + P(19) + P(20) = 1 - \big(P(0) + P(1) + P(2)\big).$$

Z toho důvodu můžeme hledanou pravděpodobnost vypočítat jednodušeji takto:

$$P(\mathbb{X} \geq 3) = 1 - P(\mathbb{X} \leq 2) = 1 - \big(P(0) + P(1) + P(2)\big) = 1 - (0,003 + 0,021 + 0,067) = 0,909,$$

kde hodnoty $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ jsou použity z řešení části b).

Z předchozích příkladů je zřejmé, že výpočty pravděpodobností u náhodné veličiny s binomickým rozdělením jsou poněkud rozsáhlejší. V příloze č. 1 na straně **??** je popsán postup, jak lze tyto výpočty provést pomocí programu *Excel* z balíku Microsoft Office. Popsaný postup pak funguje stejně i v případě dalších tabulkových procesorů např. v *Tabulkách* dostupných mezi aplikacemi Googlu atd.

Úlohy k samostatnému řešení

1.38. Jaká je pravděpodobnost, že při 10 hodech mincí padne líc

a) právě dvakrát?

b) alespoň jednou?

c) nejvýše třikrát?

1.39. Podíl nezaměstnaných v populaci je 20 %. Vypočtěte pravděpodobnost, že mezi 10 náhodně vybranými osobami budou nejvýše dva nezaměstnaní.

a) nejvýše dva nezaměstnaní.

b) alespoň dva nezaměstnaní.

1.3.2 Hypergeometrické rozdělení

Hypergeometrické rozdělení je základním pravděpodobnostním rozdělením při výběru bez vracení, kdy provedeme náhodný výběr a vybranou jednotku nevracíme do základního souboru.

1.40. Určitý typ součástek je dodáván v sériích po 50 kusech. Při přejímací kontrole je z každé série náhodně vybráno 5 výrobků ke kontrole. Tato kontrola je přitom prováděna tak, že výrobek je podroben destrukční zkoušce. Víme, že v sérii je deset vadných kusů. Potom počet vadných kusů mezi pěti vybranými výrobky je náhodnou veličinou s možnými hodnotami $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.41. V balíčku 32 karet jsou 4 esa. Hrajeme hru, při které si z balíčku vezmeme do ruky 6 různých karet. Potom počet es v ruce je náhodnou veličinou s možnými hodnotami $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

1.42. V balíčku 32 karet je 8 srdcových karet. Hrajeme hru, při které je v talonu odhozeno již 26 karet a ve hře zbývá pouze 6 karet. Potom počet srdcových karet odhozených v talonu je náhodnou veličinou s možnými hodnotami $M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Společným rysem uvedených úloh je, že máme nějaký základní soubor prvků (výrobky v sérii, balíček karet) a některé z prvků tohoto souboru mají nějakou vlastnost (být vadný výrobek, být eso) a zbylé prvky základního souboru tuto vlastnost nemají (výrobky bez vady, „ne-esové“ karty). Provedeme výběr několika prvků ze základního souboru. V něm mohou být jak prvky s uvažovanou vlastností, tak i prvky bez této vlastnosti. Náhodnou veličinou je počet prvků s danou vlastností v provedeném výběru.

Definice 1.3.2. Mějme situaci, kdy v základním souboru o N prvcích jich má M určitou vlastnost a zbylých $N - M$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně ze souboru vybereme n prvků, z nichž žádný nevracíme zpět. Počet prvků se sledovanou vlastností mezi n vybranými prvky je náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ s tzv. *hypergeometrickým rozdělením pravděpodobnosti.* Pro pravděpodobnostní funkci veličiny $\mathbb{X}$ platí

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{pro } \max\{n - N + M, 0\} \leq x \leq \min\{M, n\}, \tag{1.10}$$

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s hypergeometrickým rozdělením pravděpodobnosti platí:

$$E(\mathbb{X}) = n \cdot \frac{M}{N} \qquad D(\mathbb{X}) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1} \tag{1.11}$$

Připomeňme, že ve vzorci (1.10) je

- N rozsah základního souboru
- M počet prvků s danou vlastností v základním souboru
- n počet prvků vybraných ze základního souboru
- x počet prvků z výběru s uvažovanou vlastností

Důvody podmínek ve vzorci (1.10) omezujících hodnotu x, jak zdola tak shora, jsou naznačeny v úvodních úlohách. V Příkladu 1.40 byla nejvyšší možnou hodnotou x velikost výběru (vadných výrobků bylo více než je velikost výběru). V Příkladu 1.41 bylo nejvyšší možnou hodnotou x množství prvků s danou vlastností v základním souboru (es bylo méně než je velikost výběru). V Příkladu 1.42 bylo nejnižší možnou hodnotou x číslo 2, neboť v balíčku karet je celkem 8 srdcových es a ve hře zbývá posledních 6 karet. To znamená, že minimálně 2 srdcové karty jsou již odhozeny do talonu. Tyto okolnosti vždy musíme uvážit, když stanovujeme možný rozsah hodnot náhodné veličiny s hypergeometrickým rozdělením pravděpodobnosti.

1.43. V balíčku 32 karet jsou 4 esa. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru (bez vracení) 6 karet budou mezi vybranými kartami

a) právě 2 esa,

b) nejvýše dvě esa,

c) alespoň dvě esa.

Řešení: V zadané úloze má základní soubor (balíček karet) celkem 32 prvků – je $N = 32$. Velikost výběru je rovna 6 kartám – je $n = 6$. Sledovanou vlastností je „být esem“ – tuto vlastnost mají celkem čtyři karty – je $M = 4$. Hodnoty x se pak liší podle konkrétního zadání.

a) Ve výběru budou právě dvě esa pro $\mathbb{X} = 2$. Je tedy

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(\mathbb{X} = 2) = P(2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{32-4}{6-2}}{\binom{32}{6}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{4}}{\binom{32}{6}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot\frac{28!}{4!\cdot(28-4)!}}{\frac{32!}{6!\cdot(32-6)!}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{28!}{4!\cdot 24!}}{\frac{32!}{6!\cdot 26!}}$$

$$= \frac{\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{25\cdot 26\cdot 27\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}{\frac{27\cdot 28\cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}} = \frac{(3\cdot 2)\cdot(25\cdot 13\cdot 9\cdot 7)}{9\cdot 28\cdot 29\cdot 31\cdot 4} = \frac{122\,850}{906\,192} \doteq 0,136$$

Provedený výpočet je rozepsán podrobně, aby bylo vidět, jakým způsobem byl uskutečněn. Krácení ve zlomku v posledním řádku je samozřejmě možné provést i jiným způsobem. Pokud používané kalkulačky či SW umožní rovnou vypočítat vzniklá kombinační čísla, je vhodné tuto možnost využít. Pravděpodobnost, že ve výběru šesti karet budou právě dvě esa, je rovna přibližně 0,136.

b) Ve výběru budou nejvýše dvě esa pro $\mathbb{X} \leq 2$, tj. buď žádné eso nebo jedno eso nebo dvě esa. Je tedy

$$P(\mathbb{X} \leq 2) = P(\mathbb{X} = 0) + P(\mathbb{X} = 1) + P(\mathbb{X} = 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$= \frac{\binom{4}{0}\binom{32-4}{6-0}}{\binom{32}{6}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{32-4}{6-1}}{\binom{32}{6}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{32-4}{6-2}}{\binom{32}{6}} = \frac{\binom{4}{0}\binom{28}{6}}{\binom{32}{6}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{5}}{\binom{32}{6}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{4}}{\binom{32}{6}}$$

$$= \frac{\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot\frac{28!}{6!\cdot 22!}}{\frac{32!}{6!\cdot 26!}} + \frac{\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{28!}{5!\cdot 23!}}{\frac{32!}{6!\cdot 26!}} + \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{28!}{4!\cdot 24!}}{\frac{32!}{6!\cdot 26!}} \doteq 0,4157 + 0,4338 + 0,1356 = 0,9851$$

Pravděpodobnost, že ve výběru šesti karet budou nejvýše dvě esa, je rovna přibližně 0,985.

c) Ve výběru budou alespoň dvě esa, pokud je $\mathbb{X} \geq 2$, tj. ve výběru budou dvě, tři nebo čtyři esa. (Víc es než čtyři ve výběru být nemůže, protože jich tam víc není.)

$$P(\mathbb{X} \geq 2) = P(\mathbb{X} = 2) + P(\mathbb{X} = 3) + P(\mathbb{X} = 4) = P(2) + P(3) + P(4)$$

Výpočet bychom mohli provést analogicky k předchozím výpočtů. Můžeme však také využít již zjištěné výsledky z předchozích podúloh, neboť opačným jevem k *alespoň dvě esa* je jev *nejvýše jedno eso.*

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} \geq 2) &= 1 - P(\mathbb{X} \leq 1) = 1 - \big(P(\mathbb{X} = 0) + P(\mathbb{X} = 1)\big) = 1 - \big(P(0) + P(1)\big) \\ &= 1 - (0,4157 + 0,4338) = 0,1505 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že ve výběru šesti karet budou alespoň dvě esa, je rovna přibližně 0,151. Při výpočtu jsme použili vypočtené pravděpodobnosti z podúlohy b).

1.44. Určitý typ součástek je dodáván v sériích po 50 kusech. Při přejímací kontrole je z každé série náhodně vybráno 5 výrobků. Série je přijata, jestliže mezi kontrolovanými výrobky není žádný zmetek. Jaká je pravděpodobnost, že série bude přijata, jestliže obsahuje 10 zmetků? Kontrola je přitom prováděna tak, že výrobek je podroben destrukční zkoušce.

Řešení: Začneme posledním údajem – to, že výrobek je podroben destrukční zkoušce, znamená, že po výběru ke zkoušce jej zničíme a nemůžeme jej vrátit do základního souboru. Proto se jedná o výběr bez vracení. V zadané úloze má základní soubor (všechny výrobky v jedné sérii) celkem 50 prvků – je $N = 50$. Velikost výběru je rovna 5 výrobkům – tolik jich je vybráno ke kontrole – je $n = 5$. Sledovanou vlastností je „být vadným výrobkem“ – tuto vlastnost má celkem deset výrobků – je $M = 10$. Otázka zní s jakou pravděpodobností bude série přijata – přitom série je přijata, pokud je v kontrolním výběru 0 vadných kusů, proto chceme vypočítat pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny je rovna nule – tj. $x = 0$.

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} = 0) = P(0) &= \frac{\binom{10}{0}\binom{50-10}{5-0}}{\binom{50}{5}} = \frac{\binom{10}{0}\binom{40}{5}}{\binom{50}{5}} = \frac{\frac{10!}{0!\cdot(10-0)!}\cdot\frac{40!}{5!\cdot(40-5)!}}{\frac{50!}{5!\cdot(50-5)!}} = \frac{\frac{10!}{0!\cdot 10!}\cdot\frac{40!}{5!\cdot 35!}}{\frac{50!}{5!\cdot 45!}} \\ &= \frac{40!\cdot 45!}{35!\cdot 50!} = \frac{36\cdot 37\cdot 38\cdot 39\cdot 40}{46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50} = \frac{78\,960\,960}{254\,251\,200} \doteq 0,311. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že série je přijata, je rovna přibližně 0,311.

1.45. Ve hře Sportka se losuje šest čísel z celkového počtu 49 čísel. Hra probíhá tak, že sázející před losováním výherních čísel zatrhne na sázkovém tiketu šest čísel - ta představují vsazená čísla. Pokud všech šest vsazených čísel na sázkovém tiketu odpovídá všem šesti vylosovaným číslům, sázející vyhrává první pořadí ve hře. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost výhry prvního pořadí ve hře Sportka.

Řešení: Vylosovaná čísla se do osudí nevrací, stejně tak sázející musí zatrhnout šest různých čísel – jedná se tedy o výběr bez vracení. V zadané úloze má základní soubor (všechna čísla v osudí) celkem 49 prvků – je $N = 49$. Velikost výběru je rovna 6 vsazeným číslům na sázkovém tiketu – je $n = 6$. Sledovanou vlastností je „být výherním číslem" – tuto vlastnost má celkem šest vylosovaných čísel – je $M = 6$. Náhodnou veličinou je počet vylosovaných výherních čísel v hráčově výběru. Otázka zní s jakou pravděpodobností bude v hráčově výběru všech šest čísel s vlastností výherní číslo? Je tedy $x = 6$.

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(\mathbb{X} = 6) = P(6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{49-6}{6-6}}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{6!}{6!\cdot(6-6)!}\cdot\frac{43!}{0!\cdot(43-0)!}}{\frac{49!}{6!\cdot(49-6)!}} = \frac{\frac{6!}{6!\cdot 0!}\cdot\frac{43!}{0!\cdot 43!}}{\frac{49!}{6!\cdot 43!}}$$

$$= \frac{6!\cdot 43!}{49!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49} = \frac{720}{10\,068\,347\,520} = \frac{1}{13\,983\,816} \doteq 7,15\cdot 10^{-8}.$$

Pravděpodobnost výhry prvního pořadí ve hře sportka je přibližně 0,000 000 071 5, což není mnoho. Podle předposledního údaje je zřejmé, že v průměru vyhrává jedna sázka ze 14 milionů sázek. Pro uvážení, jak malá vlastně tato pravděpodobnost je, si můžete přečíst

Úlohy k samostatnému řešení

1.46. Ve skupině 40 osob umí 3 lidé španělsky. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru 5 osob z této skupiny bude alespoň jeden z nich mluvit španělsky?

1.47. V aplikaci Spotify mám sestavený playlist, ve které je celkem 6 českých a 24 zahraničních písní. Jaká je pravděpodobnost, že při přehrávání playlistu v náhodném pořadí zazní tři různé české písně hned za sebou? Jaký bude průměrný počet českých písní v sérii pěti písní za sebou?

1.48. Výhra třetího pořadí ve hře Sportka nastane, dokáže-li sázející správně uhodnout právě pět čísel ze šesti losovaných výherních čísel. Jaká je pravděpodobnost výhry třetího pořadí ve hře Sportka?

1.3.3 Vztah binomického a hypergeometrického rozdělení

Nyní se budeme věnovat aproximaci (nahrazení jisté hodnoty pomocí blízké, podobné hodnoty) náhodné veličiny s hypergeometrickým rozdělením pomocí náhodné veličiny s binomickým rozdělením, viz videopřednáška *Diskrétní náhodná veličina 3* od času 15:45.

V některých případech je náročné či přímo prakticky nemožné vypočítat pravděpodobnosti jednotlivých hodnot náhodné veličiny s hypergeometrickým rozdělením. Názornou ukázkou může být výpočet následující úlohy.

1.49. Rybáři chtějí určit přibližný počet ryb v rybníku (ponechme stranou použitou metodiku a předpokládejme, že v rybníku žije celkem 50 000 ryb). Za tím účelem rybáři vylovili z rybníku 1 000 ryb, označili je a pustili zpět do vody. Za týden se rybáři vrátili a vylovili 2 000 ryb. Vypočtěte pravděpodobnost, že ve znovuvyloveném vzorku bude právě 50 ryb označených během původního výlovu.

Řešení: Jedná se o výběr bez vracení (jedna ryba nemůže být během druhého výlovu v síti dvakrát). Celkem je v rybníku $N = 50\,000$ ryb, vlastnost „být označenou rybou z prvního výlovu" má $M = 1\,000$ ryb, počet znovuvylovených ryb, tj. velikost výběru je $n = 2\,000$ ryb.

Náhodnou veličinou je *počet označených ryb ve druhém výlovu*, přičemž hodnota, pro kterou chceme vypočítat pravděpodobnost, je $x = 40$. Jedná se o tedy o náhodnou veličinu s hypergeometrickým rozdělením.

Výpočet je následující:

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(\mathbb{X} = 100) = P(100) = \frac{\binom{1\,000}{40}\binom{50\,000-1\,000}{2\,000-40}}{\binom{50\,000}{2\,000}} = \frac{\binom{1\,000}{40}\binom{49\,000}{1\,960}}{\binom{50\,000}{2\,000}} = \frac{\frac{1\,000!}{40!\cdot 960!}\cdot\frac{49\,000!}{1\,960!\cdot 47\,040!}}{\frac{50\,000!}{2\,000!\cdot 48\,000!}}.$$

Zde počítané faktoriály i po zkrácení ve zlomcích představují tak obrovská čísla, že je prakticky nemožné je počítat.

Nyní přichází ke slovu užitečnost výše zmíněné možnosti aproximace. Opět použijeme ilustrační příklad.

1.50. V regionu žije 100 000 obyvatel, z nichž je 5 000 nezaměstnaných. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 10 náhodně vybranými různými osobami v daném regionu je právě jeden nezaměstnaný?

Řešení: Uvažujme náhodnou veličinu *počet nezaměstnaných mezi deseti vybranými osobami.* V principu se jedná o náhodnou veličinu s hypergeometrickým rozdělením ($N = 100\,000$, $M = 5\,000$, $n = 10$, $x = 1$). Při výpočtu pravděpodobnosti pomocí hypergeometrického rozdělení dostaneme:

$$P(1) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5\,000}{1}\binom{100\,000-5\,000}{10-1}}{\binom{100\,000}{10}} = \frac{\binom{5\,000}{1}\binom{95\,000}{9}}{\binom{100\,000}{10}} = 0,315147097.$$

Na úlohu se lze ovšem podívat také tím způsobem, že náhodným jevem A je výběr nezaměstnaného. Pokud je mezi 100 000 lidmi právě 5 000 nezaměstnaných, pak pravděpodobnost výběru nezaměstnané osoby při jednom výběru je

$$P(A) = \frac{5\,000}{100\,000} = 0,05.$$

Nyní desetkrát konáme náhodný pokus (náhodně vybíráme osobu z populace) a nahodnou veličinu definuijeme jako počet případů, kdy nastal jev A. To odpovídá definici náhodné veličiny s binomickým rozdělením pravděpodobnosti. Výpočet potom vypadá následujícím způsobem.

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x}$$

$$P(\mathbb{X} = 1) = P(1) = \binom{10}{1}\cdot 0,05^1\cdot(1-0,05)^{10-1} = 10\cdot 0,05\cdot(0,95)^9 = 0,315124705$$

Porovnáním výsledků plynoucích z hypergeometrického a binomického rozdělení vidíme, že získané výsledky se liší až na pátém desetinném místě, takže při zaokrouhlení na tři desetinná místa (což se často děje) rozdíl nepoznáme – z obou přístupů dostaneme výsledek, že hledaná pravděpodobnost je rovna 0,315. Mimochodem – pro ostatní hodnoty obou náhodných veličin jsou příslušné pravděpodobnosti uvedeny v Tabulce 1.6.

Otázkou samozřejmě je, za jakých okolností lze výše uvedenou záměnu použít. Odpověď je následující.

x	hypergeom. rozdělení $P(x)$	binomické rozdělení $P(x)$
0	0,598722758	0,598736939
1	0,315147097	0,315124705
2	0,074631459	0,074634799
3	0,010471172	0,010475059
4	0,000963932	0,000963932
5	0,000608344	0,000060935
6	0,000002665	0,000002672
7	0,000000080	0,000000080
8	0,000000002	0,000000002
9	0,000000000	0,000000000
10	0,000000000	0,000000000

Tabulka 1.6: Porovnání hodnot pravděpodobnnosti u hypergeometrického a binomického rozdělení

Věta 1.3.3. *Je-li velikost výběru n malá v porovnání s velikostí základního souboru N, (tj. $n/N < 0.05$), můžeme místo hypergeometrického rozdělení použít binomické rozdělení. Parametr p příslušného binomického rozdělení určíme ze vztahu*

$$p = \frac{M}{N}. \tag{1.12}$$

Podle uvedeného návodu vypočteme pravděpodobnost z Příkladu 1.49.

1.51. Ověřte předpoklady Věty 1.3.3, a pokud budou splněny, vypočtěte pravděpodobnost z Příkladu 1.49 pomocí binomického rozdělení.

Řešení: Při řešení Příkladu 1.49 jsme odvodili následující parametry hypergeometrického rozdělení – $N = 50\,000$, $M = 1\,000$ a $n = 2\,000$. Abychom mohli rozumně nahradit toto rozdělení binomickým rozdělením, měla by být podle Věty 1.3.3 splněna nerovnost $n/N < 0,05$. Zde je

$$\frac{n}{N} = \frac{2\,000}{50\,000} = 0,04 < 0,05,$$

proto je podmínka věty splněna.

Parametr p binomického rozdělení vypočteme ze vztahu 1.12. Je

$$p = \frac{M}{N} = \frac{1\,000}{50\,000} = 0,02.$$

Dosazením do vzorce 1.8 na straně 18 dostaneme:

$$P(\mathbb{X} = 100) = \binom{2\,000}{50} \cdot 0,02^{50}(1-0,02)^{2\,000-50} = \frac{2\,000!}{50! \cdot 1950!} \cdot 0,02^{50} \cdot 0,98^{1950} = \text{ajajaj}$$

I v tomto případě je výpočet příliš náročný, budeme si muset pomoci jiným způsobem – ukáže se, že tou pomocí je náhodná veličina s tzv. Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti.

1.3.4 Poissonovo rozdělení

Náhodné veličině s Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti se věnuje videopřednáška dr. Šimsové *Diskrétní náhodná veličina 2* od času 38:48. Připomeňme, že poissonovskými událostmi rozumíme takové události, které přicházejí v čase, přičemž platí:

- v jednom okamžiku může nastat nejvýše jedna událost,
- události přicházejí nezávisle na sobě (počty vzniklých událostí v disjunktních časových intervalech jsou nezávislé),
- pravděpodobnost, že událost nastane v intervalu $(t, t+h)$ závisí na h, ale nikoliv na t. Jinými slovy – pravděpodobnost výskytu události závisí na délce intervalu, nikoliv na tom, kdy časový interval začíná.

1.52. Po silnici před naší školou projede v době trvání cvičení průměrně 100 automobilů za hodinu. Náhodnou veličinou je počet projížďějích automobilů během jedné hodiny. Možné hodnoty náhodné veličiny tvoří množinu $M = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.

1.53. Na zákaznickou linku firmy ABC se každou minutu obrací průměrně 62 zákazníků. Náhodnou veličinou je počet volajících zákazníků za jednu minutu. Možné hodnoty náhodné veličiny tvoří množinu $M = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.

Definice 1.3.4. Označme průměrný počet výskytů jisté poissonovské události za časovou jednotku číslem λ. Potom počet událostí x, které nastanou za časovou jednotku, je náhodnou veličinou $\mathbb{X}$ s tzv. Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti, jejíž pravděpodobnostní funkce má předpis

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s poissonovým rozdělením pravděpodobnosti platí:

$$E(\mathbb{X}) = \lambda \qquad D(\mathbb{X}) = \lambda$$

1.54. K pokladně v supermarketu přistoupí průměrně 5 zákazníků během deseti minut.

a) Jaká je pravděpodobnost, že během následujících 10 minut přijdou právě 3 zákazníci?

b) Jaká je pravděpodobnost, že během následujích dvou minut nepřijde ani jeden zákazník?

Řešení:

a) Při řešení příkladu budeme předpokládat, že příchod zákazníka k pokladně je poissonovský proces. Potom náhodná veličina *počet zákazníků, kteří přišli k pokladně během deseti minut* má poissonovské rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\lambda = 5$ a pro pravděpodobnost, že během následujících 10 minut přijdou právě 3 zákazníci, platí

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$
$$P(\mathbb{X} = 3) = P(3) = \frac{5^3}{3!} \cdot \mathrm{e}^{-5} = 0,14038$$

Pravděpodobnost, že během následujících 10 minut přijdou právě 3 zákazníci je rovna přibližně $p = 0,14$.

b) Při řešení příkladu budeme opět předpokládat, že příchod zákazníka k pokladně je poissonovský proces. Za náhodnou veličinu budeme uvažovat *počet zákazníků, kteří přišli k pokladně během dvou minut.* Pak tato veličina má poissonovské rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\lambda = 1$ (když za 10 minut přijde v průměru 5 zákazníků, tak za 2 minuty v průměru přijde 1 zákazník; proto je $\lambda = 1$) a pravděpodobnost, že během následujících dvou minut nepřijde ani jeden zákazník (tj. přijde nula zákazníků), platí

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$
$$P(\mathbb{X} = 0) = P(0) = \frac{1^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-1} = 0,3679$$

Pravděpodobnost, že během následujích dvou minut nepřijde ani jeden zákazník je rovna přibližně $p = 0,37$.

1.55. Na výrobní lince dojde k poruše průměrně jednou za dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že během osmihodinové směny dojde na výrobní lince

a) ke dvěma poruchám?

b) k nejvýše dvěma poruchám?

Řešení: Při řešení příkladu budeme předpokládat, že událost, kdy na výrobní lince dojde k poruše, je poissonovský proces. Za náhodnou veličinu budeme uvažovat *počet poruch na výrobní lince za osm hodin provozu.* Pak tato veličina má poissonovské rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\lambda = 4$ (když za dvě hodiny dojde v průměru k jedné poruše, tak za osm hodin v průměru nastanou čtyři poruchy; proto je $\lambda = 4$).

a) Pravděpodobnost, že během osmihodinové směny dojde na výrobní lince ke dvěma poruchám, odpovídá $P(\mathbb{X} = 2)$.

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$
$$P(\mathbb{X} = 2) = P(2) = \frac{4^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-4} = 0,1465$$

Pravděpodobnost, že během osmihodinové směny dojde na výrobní lince ke dvěma poruchám, je rovna přibližně $p = 0,15$.

b) Pravděpodobnost, že během osmihodinové směny dojde na výrobní lince k nejvýše dvěma poruchám, odpovídá $P(\mathbb{X} \leq 2)$.

$$P(\mathbb{X} \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{4^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-4} + \frac{4^1}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-4} + \frac{4^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-4} = 0,2381$$

Pravděpodobnost, že během osmihodinové směny dojde na výrobní lince k nejvýše dvěma poruchám, je rovna přibližně $p = 0,24$.

Poissonovo rozdělení popisuje počty událostí i v jiných než časových jednotkách, např. v jednotkách délky, obsahu atd.

1.56. V pruhu látky se vyskytuje průměrně 5 kazů na 100 metrů látky. Jaká je pravděpodobnost, že:

a) v náhodně vybrané roli látky o délce 100 metrů se nacházejí právě 4 kazy?

b) v náhodně vybrané roli látky o délce 200 metrů se nachází právě 6 kazů?

c) v náhodně vybrané roli látky o délce 50 metrů se nachází nejvýše 1 kaz?

Řešení: Při řešení ověříme (zdůvodníme), že výskyt kazů na m^2 látky opravdu můžeme považovat za poissonovský proces. Připomeňme vlastnosti poissonovského procesu.

- V jednom okamžiku může nastat nejvýše jedna událost:
  - na jednom místě může být nejvýše jeden kaz.
- Události přicházejí nezávisle na sobě (počty vzniklých událostí v disjunktních časových intervalech jsou nezávislé):
  - Kazy se vyskytují nezávisle na sobě (počty kazů v různých pruzích látky jsou nezávislé ve smyslu, že počet kazů v předchozím m^2 neříká nic o tom, jaký počet kazů bude v následujícím m^2 látky).
- Pravděpodobnost, že událost nastane v intervalu $(t, t+h)$ závisí na h, ale nikoliv na t. Jinými slovy – pravděpodobnost výskytu události závisí na délce intervalu, nikoliv na tom, kdy časový interval začíná.
  - Počet kazů v m^2 nezávisí na tom, od kolikátého metru látky začínáme počet kazů měřit, ale pouze na tom, jaká je délka toho pruhu látky.

Nyní se již můžeme zaměřit na řešení konkrétních podúloh. Při jejich řešení budeme předpokládat, že výskyt kazů v m^2 látky je poissonovský proces.

a) Za náhodnou veličinu budeme uvažovat *počet kazů v roli látky o délce 100 metrů*. Pak tato veličina má poissonovské rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\lambda = 5$ a příslušnou pravděpodobností je $P(\mathbb{X} = 4)$.

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$
$$P(\mathbb{X} = 4) = P(4) = \frac{5^4}{4!} \cdot \mathrm{e}^{-5} = 0,175$$

Pravděpodobnost, že v náhodně vybrané roli látky o délce 100 metrů se nacházejí právě 4 kazy, je rovna $p = 0,175$

b) Za náhodnou veličinu budeme uvažovat *počet kazů v roli látky o délce 200 metrů*. Pak tato veličina má poissonovské rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\lambda = 10$ (jestliže ve 100 metrech látky je průměrně 5 kazů, pak v 200 metrech jich můžeme průměrně očekávat 10; proto je $\lambda = 10$) a příslušnou pravděpodobností je $P(\mathbb{X} = 6)$.

$$P(\mathbb{X} = x) = P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$
$$P(\mathbb{X} = 6) = P(6) = \frac{10^6}{6!} \cdot \mathrm{e}^{-10} = 0,063$$

Pravděpodobnost, že v náhodně vybrané roli látky o délce 200 metrů se nachází právě 6 kazů, je rovna $p = 0,063$.

c) Za náhodnou veličinu budeme uvažovat *počet kazů v roli látky o délce 50 metrů.* Pak tato veličina má poissonovské rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $\lambda = 2,5$ (jestliže ve 100 metrech látky je průměrně 5 kazů, pak v 50 metrech jich můžeme průměrně očekávat 2,5; proto je $\lambda = 2,5$) a příslušnou pravděpodobností je $P(\mathbb{X} \leq 1)$.

$$P(\mathbb{X} \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{2,5^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-2,5} + \frac{2,5^1}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-2,5} = 0,287$$

Pravděpodobnost, že v náhodně vybrané roli látky o délce 50 metrů se nachází nejvýše jeden kaz, je rovna $p = 0,287$.

1.57. Redaktor časopisu ze zkušenosti ví, že v dodaných rukopisech jsou průměrně 3 chyby na jedné tiskové straně. Jaká je pravděpodobnost, že v dodaném článku o rozsahu 5 stran bude méně než 10 chyb?

Řešení: Ze zadání plyne, že na 5 stranách textu bude průměrně 15 chyb. Proto bude v zadaném případě $\lambda = 15$.

$$\begin{aligned}
P(\mathbb{X} < 10) &= P(0) + P(1) + P(2) + \ldots + P(8) + P(9) \\
&= \frac{15^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-15} + \frac{15^1}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-15} + \frac{15^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-15} + \ldots + \frac{15^8}{8!} \cdot \mathrm{e}^{-15} + \frac{15^9}{9!} \cdot \mathrm{e}^{-15} \\
&= \mathrm{e}^{-15} \cdot \left(\frac{15^0}{0!} + \frac{15^1}{1!} + \frac{15^2}{2!} + \ldots + \frac{15^8}{8!} + \frac{15^9}{9!} \right) \\
&\doteq 0,0699
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že v článku o rozsahu 5 stran bude méně než 10 tiskových chyb, je přibližně rovna $p = 0,07$.

1.58. Předpokládejme, že pravděpodobnost, že se 35letý muž nedožije následujícího roku je 0,01. Roční pojistné této věkové skupiny činí 2 500 Kč. V případě úmrtí pojišťovna jednorázově vyplatí 100 000 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že zisk z 1 000 pojištěných mužů ve věku 35 let bude alespoň 2 000 000 Kč?

Řešení: Ze zadání plyne, že pojišťovna získá z pojištění 1 000 mužů celkem 2 500 000 Kč. Pokud má mít z pojištění zisk alespoň 2 000 000 Kč, potom nesmí vyplatit více než 500 000 Kč, tj. nesmí dojít k úmrtí více než 5 mužů. Dále ze zadání plyne, že v průměru zemře během jednoho roku jeden muž ze 100, tj. 10 mužů z 1 000. Je tedy $\lambda = 10$ a hledáme pravděpodobnost $P(\mathbb{X} \leq 5)$.

$$\begin{aligned}
P(\mathbb{X} \leq 5) &= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) \\
&= \frac{10^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-10} + \frac{10^1}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-10} + \frac{10^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-10} + \frac{10^3}{3!} \cdot \mathrm{e}^{-10} + \frac{10^4}{4!} \cdot \mathrm{e}^{-10} + \frac{10^5}{5!} \cdot \mathrm{e}^{-10} \\
&= \mathrm{e}^{-10} \cdot \left(\frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!} + \frac{10^5}{5!} \right) \\
&\doteq 0,067
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že zisk pojišťovny z daného pojištění bude alespoň 2 000 000 Kč, je přibližně rovna $p = 0,067$.

1.3.5 Aproximace binomického a hypergeometrického rozdělení Poissonovým rozdělením

Definice 1.3.5. Pro dostatečně velké n (prakticky pro $n > 30$) a pro malou pravděpodobnost (prakticky pro $p \leq 0,1$), lze binomické, resp. hypergeometrické rozdělení aproximovat Poissonovým rozdělením, kde $\lambda = np$, resp. $\lambda = nM/N$.

1.59. V regionu s 1 000 000 obyvatel v produktivním věku je 40 000 nezaměstnaných. V dotazníkovém šetření vybereme 100 obyvatel z regionu. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi nimi bude právě 8 nezaměstnaných.

Řešení:

Jde o výběr bez vracení, tedy o hypergeometrické rozdělení s parametry $N = 1\,000\,000$, $M = 40\,000$, $n = 100$ a $x = 8$. Je

$$P(\mathbb{X} = 8) = P(8) = \frac{\binom{40\,000}{8} \cdot \binom{960\,000}{92}}{\binom{1\,000\,000}{100}} = 0,0285.$$

Protože ale jde o „velké osudí“, je možné to počítat pomocí binomického rozdělení s parametry $n = 100$ a $p = 40\,000/1\,000\,000 = 0,04$. Tak dostaneme

$$P(\mathbb{X} = 8) = P(8) = \binom{100}{8}(0,04)^8(0,96)^{92} = 0,0285.$$

Pomocí nahodné veličiny s poissonovým rozdělením dostaneme ($\lambda = np = 100 \cdot 0,04 = 4$)

$$P(\mathbb{X} = 8) = P(8) = \frac{4^8 \cdot e^{-4}}{8!} = 0,0298.$$

1.4 Úlohy k samostatné práci

1.60. Na zákaznickou linku zavolá průměrně 12 zákazníků za hodinu. S jakou pravděpodobností nezavolá během následující čtvrthodiny ani jeden zákazník?

1.61. V rybníku je 50 000 ryb. Rybáři chytí 1 000 ryb, označí je a vrátí do rybníka. Pak vyloví 20 ryb. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou právě dvě označené ryby?

1.62. Hráč hodí šesti kostkami najednou. Jaká je pravděpodobnost, že na kostkách při hodu padla alespoň jedna jednička?

1.63. Amatérský střelec trefí při jednom výstřelu černý střed terče s pravděpodobností $p = 0.65$. Jaká je pravděpodobnost, že se střelec trefí při 10 výstřelech do černého středu terče nejvýše devětkrát?

1.64. Na plese bylo prodáno 150 losů do tomboly. V tombole je deset cen. Jaká je pravděpodobnost, že soutěžící, který si zakoupil 10 losů, vyhraje více než jednu cenu?

1.65. Předpokládejme, že pravděpodobnost narození chlapce je stejná jako pravděpodobnost narození děvčete. Vypočtěte jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi je víc synů než dcer.

1.66. V extraligovém play-off se utkaly týmy A a B. Předpokládejme, že tým A je lepší a pravděpodobnost jeho výhry činí $p = 0,6$ (jedná se o play-off, a není tedy možná remíza na konci zápasu). Jaká je pravděpodobnost výhry slabšího týmu v celé sérii, hraje-li se tato na 4 vítězné zápasy?

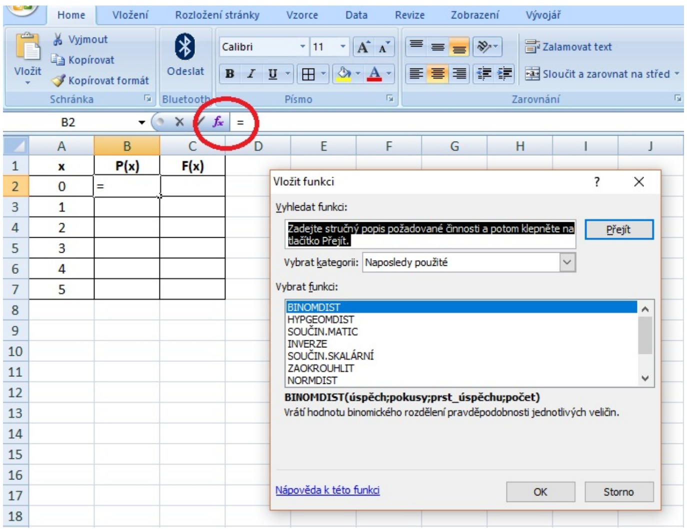
1.67. V balíčku 32 karet je osm karet červené barvy. Hráč dostane při rozdání 5 karet. Jaká je pravděpodobnost, že všechny budou mít červenou barvu?

Příloha č. 1: Výpočet náhodné veličiny s binomickým rozdělením pomocí Excelu

V této příloze si popíšeme postup při určování pravděpodobnosti hodnot náhodné veličiny s binomickým rozdělením. Postup si ukážeme na poslední z ilustračních úloh v úvodu kapitoly o binomickém rozdělení.

1.68. Předpokládejme, že jistý biatlonista při každém výstřelu zasáhne terč s pravděpodobností $p = 0,9$; tj. dlouhodobě má úspěšnost zásahu terče 90 %. Tento biatlonista přijede na střelnici a střílí pětkrát na terč. Sledujeme, kolikrát se při těchto pěti pokusech trefil do terče. Náhodnou veličinou bude počet úspěšných zásahů při pěti výstřelech na terč. Možné hodnoty této náhodné veličiny jsou $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete pravděpodobnosti všech těchto hodnot.

Řešení: Ze zadání plyne, že náhodná veličina *počet úspěšných zásahů terče při pěti výstřelech* má binomické rozdělení pravděpodobnosti. (Jev A – zásah terče při výstřelu – má při každém opakování stejnou pravděpodobnost a pokus opakujeme pětkrát.) Popišme si postup výpočtu v programu Excel. Postupovat budeme tak, že vytvoříme základní tabulku, zapíšeme možné hodnoty náhodné veličiny a necháme program spočítat pravděpodobnosti těchto hodnot. Možné hodnoty jsou 0, 1, 2, 3, 4, 5; tyto napíšeme do jednotlivých buněk pod sebe. Do druhého sloupce vložíme



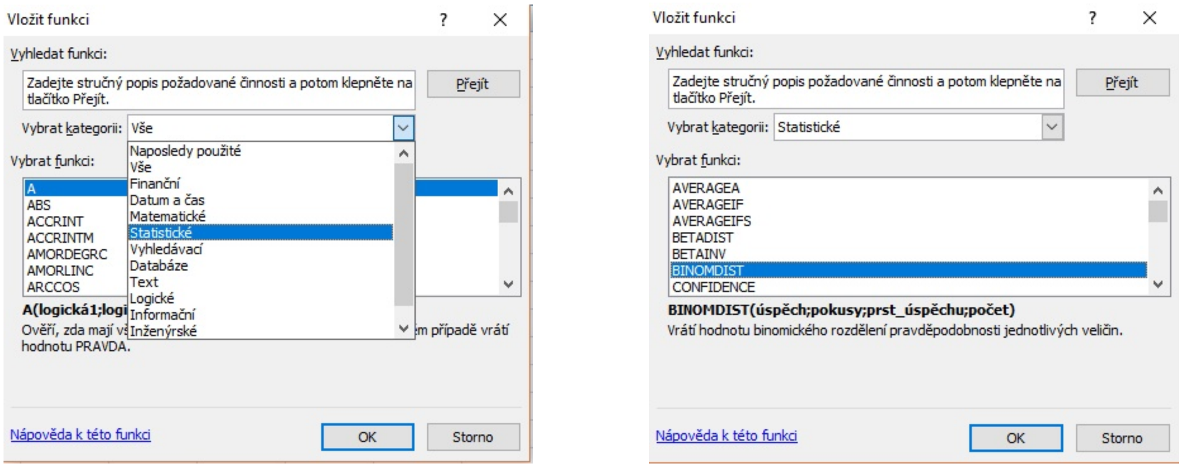
Obrázek 1.3: Vytvoření základní tabulky - zadání hodnot náhodné veličiny a vyvolání okna *Vložit funkci*

pravděpodobnosti příslušných hodnot následujícím způsobem. Označíme (vybereme) buňku vedle první hodnoty x, kliknutím na symbol f_x vyvoláme okno *Vložit funkci*, viz Obrázek 1.3. Vybereme kategorii statistických funkcí a z nabídky vybereme funkci BINOMDIST, viz Obrázek 1.4.

Funkce BINOMDIST má celkem čtyři argumenty k vyplnění, viz Obrázek 1.5.

Prvním je tzv. *Úspěch* (nápověda – počet úspěšných pokusů) - obecně se jedná o hodnotu náhodné veličiny, pro kterou počítáme pravděpodobnost. V našem případě navíc hodnoty náhodné veličiny odpovídají počtu úspěšných pokusů biatlonisty, takže označení je ve shodě s naší intuicí. Do políčka kliknutím na buňku A2 zadáme relativní odkaz na buňku, ve které se nachází hodnota x (odkaz lze zadat i ručně vypsáním).

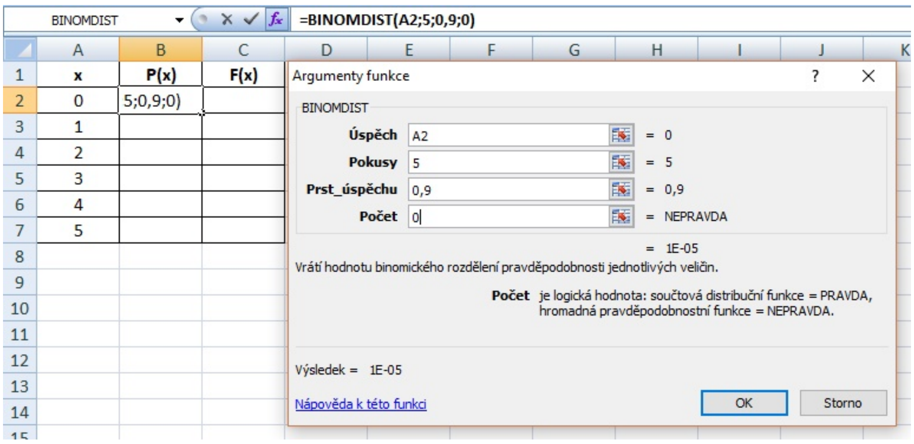
Druhý argument má název *Pokusy* a znamená počet opakování náhodného pokusu. V našem případě se jednalo o pět výstřelů, je tedy doplněno číslo 5.



Obrázek 1.4: Výběr kategorie statistických funkcí a funkce BINOMDIST

Třetí argument odkazuje na pravděpodobnost jevu A. Jmenuje se sice *Prst-úspěchu*, ale tím se nenecháme zaskočit. Pravděpodobnost úspěšného zásahu při jednom výstřelu je 0,9, proto do třetího políčka zadáme toto číslo.

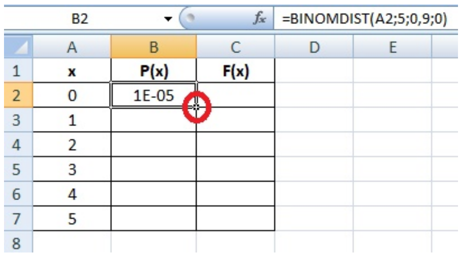
Poslední argument *Počet* určuje, zda-li chceme vypočítat pravděpodobnost dané hodnoty x, tj. hodnotu $P(\mathbb{X} = x)$, nebo hodnotu distribuční funkce pro dané x, tj. $F(x) = P(\mathbb{X} \leq x)$. V prvním případě zadáme hodnotu 0, ve druhém případě zadáme hodnotu 1. Zde chceme vypočítat hodnotu pravděpodobnosti, zadali jsme číslo 0.



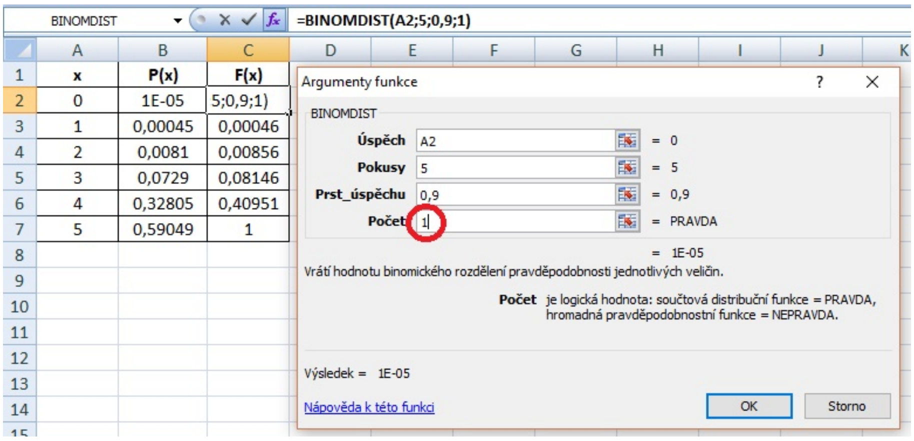
Obrázek 1.5: Zadání hodnot funkce BINOMDIST

Vyplněné okno potvrdíme kliknutím na tlačítko OK. V buňce A2 se nám zobrazí výraz 1E-05, či něco podobného. Toto je zápis v exponenciálním tvaru a znamená číslo $1 \cdot 10^{-5}$, tj. 0,00001 – což znamená prakticky hodnotu nula. Nyní najedeme kurzorem na dolní pravý roh buňky A2. Kurzor se změní ze šipky na znaménko plus (+), klikneme na tento dolní roh a tím se vzorec nakopíruje do ostatních buněk s tím, že se ve vzorci vždy změní odkaz na hodnotu x – proto jsme ji v prvním kroku zadávali pomocí relativního odkazu, viz Obrázek 1.6.

Místo pravděpodobností jednotlivých hodnot bychom mohli také chtít vypočítat hodnoty distribuční funkce. Postup je skoro stejný, pouze při vyplňování posledního argumentu zadáme hodnotu 1, viz Obrázek 1.7.



Obrázek 1.6: Pro nakopírování vzorce do ostatních buněk klikněte na dolní pravý roh buňky s vytvořeným vzorcem



Obrázek 1.7: Hodnoty distribuční funkce získáme zadáním hodnoty 1 do posledního řádku okna

Z výsledků v tabulce můžeme vyčíst mnoho informací, viz Obrázek 1.7. Například je zde uvedena informace, že

- pravděpodobnost sestřelení právě dvou terčů je rovna $0,0081$,
- pravděpodobnost sestřelení všech pěti terčů je rovna $0,59049$,
- nejvyšší pravděpodobnost má zásah všech pěti terčů,
- pravděpodobnost zásahu nejvýše dvou terčů je rovna $0,00856$,
- pravděpodobnost zásahu nejvýše čtyř terčů je rovna $0,40951$.

Zde naleznete videonávod k výpočtu.

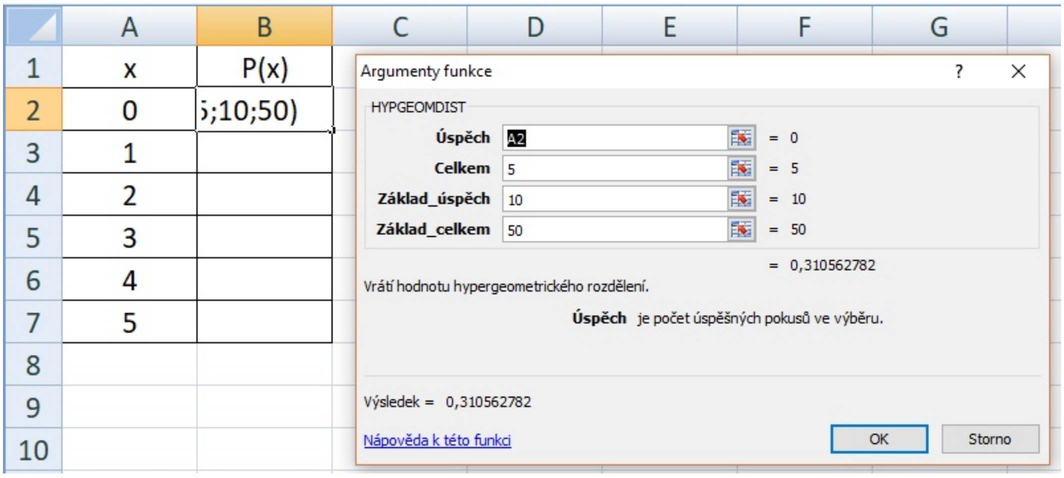
Příloha č. 2: Výpočet náhodné veličiny s hypergeometrickým rozdělením pomocí Excelu

V této příloze si popíšeme postup při určování pravděpodobnosti hodnot náhodné veličiny s hypergeometrickým rozdělením pravděpodobnosti. Postup si ukážeme na Příkladu 1.40 na straně 22

1.69. Určitý typ součástek je dodáván v sériích po 50 kusech. Při přejímací kontrole je z každé série náhodně vybráno 5 výrobků ke kontrole. Tato kontrola je přitom prováděna tak, že výrobek je podroben destrukční zkoušce. Víme, že v sérii je deset vadných kusů. Potom počet vadných kusů mezi pěti vybranými výrobky je náhodnou veličinou s možnými hodnotami $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Řešení: Ze zadání plyne, že náhodná veličina *počet vadných kusů mezi pěti vybranými výrobky* má hypergeometrické rozdělení pravděpodobnosti, kde $N = 50$, $M = 10$, $n = 5$. Popišme si postup výpočtu v programu Excel. Začátek je stejný jako v příloze č. 1. na straně 34. Vytvoříme základní tabulku, zapíšeme možné hodnoty náhodné veličiny a necháme program spočítat pravděpodobnosti těchto hodnot. Možné hodnoty jsou 0, 1, 2, 3, 4, 5; tyto napíšeme do jednotlivých buněk pod sebe. Do druhého sloupce vložíme pravděpodobnosti příslušných hodnot následujícím způsobem. Označíme (vybereme) buňku vedle první hodnoty x, kliknutím na symbol f_x vyvoláme okno *Vložit funkci*, vybereme kategorii statistických funkcí a z nabídky funkcí vybereme položku HYPGEOMDIST.

Funkce HYPGEOMDIST má celkem čtyři argumenty k vyplnění, viz Obrázek 1.8.



Obrázek 1.8: Zadání hodnot funkce HYPGEOMDIST

Prvním je tzv. *Úspěch* (nápověda – počet úspěšných pokusů ve výběru) - obecně se jedná o hodnotu náhodné veličiny, pro kterou počítáme pravděpodobnost. Do políčka kliknutím na buňku A2 zadáme relativní odkaz na buňku, ve které se nachází hodnota x (odkaz lze zadat i ručně vypsáním).

Druhý argument má název *Celkem* (nápověda – velikost výběru) a znamená počet opakování náhodného pokusu. V našem případě se jednalo o výběr pěti výrobků, je tedy doplněno číslo 5.

Třetí argument se jmenuje *Základ-úspěch*, (nápověda – počet úspěšných pokusů v základním souboru) a představuje počet prvků s danou vlastností v základním souboru. V základní souboru je celkem 10 vadných výrobků, zadáme číslo 10.

Poslední argument *Základ-celkem* (nápověda – velikost základního souboru) je roven počtu všech prvků v základním souboru. Série obsahuje 50 výrobků, prot zadáme číslo 50.

Vyplněné okno potvrdíme kliknutím na tlačítko OK. V buňce A2 se objevila příslušná hodnota pravděpodobnosti. Nyní vzorec zkopírujeme do ostatních buněk ke zbývajícím hodnotám náhodné veličiny např. tak, že kursorem najedeme na dolní pravý roh buňky A2. Kurzor se změní ze šipky na znaménko plus (+), klikneme na tento dolní roh a tím se vzorec nakopíruje do ostatních buněk.

Z výsledků v tabulce můžeme vyčíst mnoho informací, viz Obrázek 1.9. Například je zde uvedena informace, že

	A	B
1	x	P(x)
2	0	0,31056
3	1	0,43134
4	2	0,20984
5	3	0,04418
6	4	0,00396
7	5	0,00012
8		

Obrázek 1.9: Výsledky příkladu vypočtené pomocí HYPGEOMDIST

- pravděpodobnost výskytu dvou vadných výrobků ve výběru je rovna přibližně $0,21$,
- pravděpodobnost výskytu čtyř vadných výrobků ve výběru je rovna přibližně $0,004$,
- nejvyšší pravděpodobnost má výskyt jednoho vadného výrobku.

Zde naleznete videonávod k výpočtu.

Příloha č. 3: Výpočet náhodné veličiny s poissonovým rozdělením pomocí Excelu

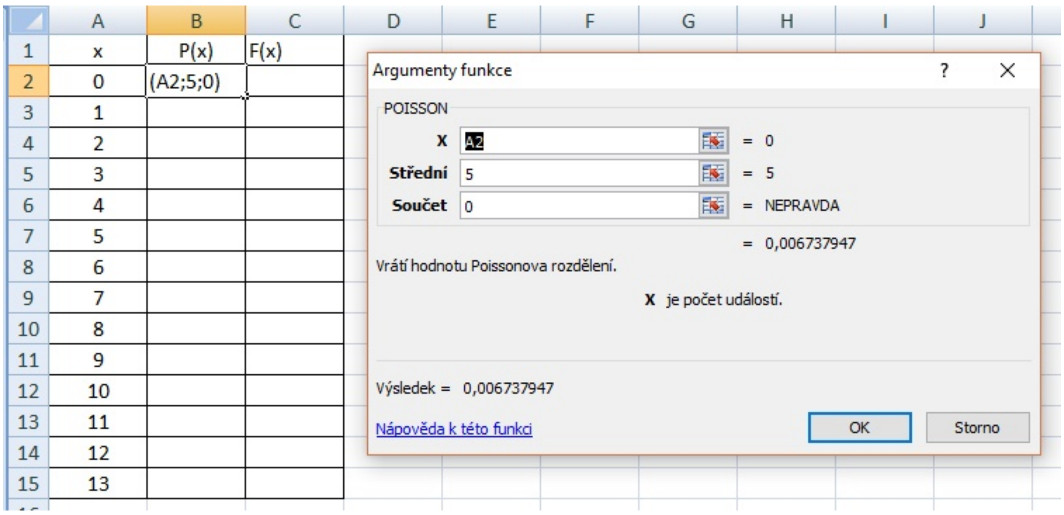
V této příloze si popíšeme postup při určování pravděpodobnosti hodnot náhodné veličiny s poissonovým rozdělením pravděpodobnosti. Postup si ukážeme na Příkladu 1.54 na straně 28 a vypočteme pravděpodobnosti pro některé další hodnoty.

1.70. K pokladně v supermarketu přistoupí průměrně 5 zákazníků během deseti minut. Určeme pravděpodobnosti několika prvních hodnot náhodné veličiny *počet zákazníků u pokladny během deseti minut.*

Řešení: Ze zadání plyne, že náhodná veličina *počet zákazníků u pokladny během deseti minut* má poissonovo rozdělení pravděpodobnosti, kde $\lambda = 5$. Začátek bude opět podobný jako v předešlých přílohách. Vytvoříme základní tabulku, zapíšeme několik prvních hodnot náhodné veličiny (obecně není počet zákazníků u pokladny shora ohraničen) a necháme program spočítat pravděpodobnosti těchto hodnot. Možné hodnoty budeme uvažovat $0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots, 12, 13$; tyto napíšeme do jednotlivých buněk pod sebe.

Do druhého sloupce vložíme pravděpodobnosti příslušných hodnot následujícím způsobem. Označíme (vybereme) buňku vedle první hodnoty x (v našem případě se jedná o buňku A2), kliknutím na symbol f_x vyvoláme okno *Vložit funkci*, vybereme kategorii statistických funkcí a z nabídky funkcí vybereme položku POISSON.

Funkce POISSON má celkem tři argumenty k vyplnění, viz Obrázek 1.10.



Obrázek 1.10: Zadání hodnot funkce HYPGEOMDIST

První argument mná označení X (nápověda – počet událostí) - opět se jedná o hodnotu náhodné veličiny, pro kterou počítáme pravděpodobnost. Do políčka kliknutím na buňku A2 zadáme relativní odkaz na buňku, ve které se nachází hodnota x (odkaz lze zadat i ručně vypsáním).

Druhý argument má název *Střední* (nápověda – předpokládaná číselná hodnota, kladné číslo) a znamená střední (očekávanou) hodnotu náhodné veličiny. V našem případě v průměru chodí 5 zákazníků za 10 minut, je tedy doplněno číslo 5.

Poslední argument *Součet* určuje, zda-li chceme vypočítat pravděpodobnost dané hodnoty x, tj. hodnotu $P(\mathbb{X} = x)$, nebo hodnotu distribuční funkce pro dané x, tj. $F(x) = P(\mathbb{X} \leq x)$.

V prvním případě zadáme hodnotu 0, ve druhém případě zadáme hodnotu 1. Zde chceme vypočítat hodnotu pravděpodobnosti, zadali jsme číslo 0.

Vyplněné okno potvrdíme kliknutím na tlačítko OK. V buňce A2 se objevila příslušná hodnota pravděpodobnosti. Nyní vzorec zkopírujeme do ostatních buněk ke zbývajícím hodnotám náhodné veličiny např. tak, že kursorem najedeme na dolní pravý roh buňky A2. Kurzor se změní ze šipky na znaménko plus (+), klikneme na tento dolní roh a tím se vzorec nakopíruje do ostatních buněk.

Místo pravděpodobností jednotlivých hodnot bychom mohli také chtít vypočítat hodnoty distribuční funkce. Postup je skoro stejný, pouze při vyplňování posledního argumentu zadáme hodnotu 1.

Z výsledků v tabulce opět vyčteme mnoho informací, viz Obrázek 1.11. Například je zde uvedena informace, že

	A	B	C
1	x	P(x)	F(x)
2	0	0,00674	0,00674
3	1	0,03369	0,04043
4	2	0,08422	0,12465
5	3	0,14037	0,26503
6	4	0,17547	0,44049
7	5	0,17547	0,61596
8	6	0,14622	0,76218
9	7	0,10444	0,86663
10	8	0,06528	0,93191
11	9	0,03627	0,96817
12	10	0,01813	0,9863
13	11	0,00824	0,99455
14	12	0,00343	0,99798
15	13	0,00132	0,9993

Obrázek 1.11: Výsledky příkladu vypočtené pomocí HYPGEOMDIST

- pravděpodobnost příchodu tří zákazníků během deseti minut je rovna přibližně $0,14037$,
- pravděpodobnost příchodu nejvýše tří zákazníků během deseti minut je rovna přibližně $0,26503$,
- nejvyšší pravděpodobnost (modální hodnotu) má příchod čtyř nebo pěti zákazníků během deseti minut.

Zde naleznete videonávod k výpočtu.