Statistika I (KMI/PSTAT)

Cvičení čtvrté

aneb

geometrický a harmonický průměr

Geometrický a harmonický průměr

Po dnešní hodině byste měli být schopni:

- poznat vhodnost užití geometrického průměru,
- vypočítat geometrický průměr jak v prostém, tak i ve váženém tvaru s absolutními i relativními vahami,
- poznat vhodnost užití harmonického průměru,
- vypočítat harmonický průměr jak v prostém, tak i ve váženém tvaru s absolutními i relativními vahami.

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

duben: $0,9 \cdot 98\,000 = 88\,200$ Kč

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

duben: $0,9 \cdot 98\,000 = 88\,200$ Kč

---

duben: $0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$ Kč

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

duben: $0,9 \cdot 98\,000 = 88\,200$ Kč

---

duben: $0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$ Kč

Celková průměrná změna musí být taková, abychom po jejím trojím provedení dostali ze 100 000 Kč částku 88 200 Kč.

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

duben: $0,9 \cdot 98\,000 = 88\,200$ Kč

---

duben: $0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$ Kč

Celková průměrná změna musí být taková, abychom po jejím trojím provedení dostali ze 100 000 Kč částku 88 200 Kč.

$\bar{x}$... průměrná měsíční změna

(ve formě násobícího koeficientu, viz čísla 0.9, 0.7, 1.4):

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

duben: $0,9 \cdot 98\,000 = 88\,200$ Kč

---

duben: $0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$ Kč

Celková průměrná změna musí být taková, abychom po jejím trojím provedení dostali ze 100 000 Kč částku 88 200 Kč.

$\bar{x}\ldots$ průměrná měsíční změna

(ve formě násobícího koeficientu, viz čísla 0.9, 0.7, 1.4):

$$88\,200 = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot 100\,000$$

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

duben: $0,9 \cdot 98\,000 = 88\,200$ Kč

---

duben: $0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$ Kč

Celková průměrná změna musí být taková, abychom po jejím trojím provedení dostali ze 100 000 Kč částku 88 200 Kč.

$\bar{x}\ldots$ průměrná měsíční změna

(ve formě násobícího koeficientu, viz čísla 0.9, 0.7, 1.4):

$$88\,200 = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot 100\,000$$
$$88\,200 = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$$

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

duben: $0,9 \cdot 98\,000 = 88\,200$ Kč

---

duben: $0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$ Kč

Celková průměrná změna musí být taková, abychom po jejím trojím provedení dostali ze 100 000 Kč částku 88 200 Kč.

$\bar{x}\ldots$ průměrná měsíční změna

(ve formě násobícího koeficientu, viz čísla 0.9, 0.7, 1.4):

$$88\,200 = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot 100\,000$$
$$88\,200 = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$$
$$(\bar{x})^3 = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4$$

Průměry

Příklad 1

Na výpisech z účtu jsou následující údaje. Změna stavu účtu:
únor oproti lednu: růst o $40\ \%$
březen oproti únoru: pokles o $30\ \%$
duben oproti březnu: pokles o $10\ \%$
Otázka: jaká byla průměrná změna stavu od února do dubna?

leden: 100 000 Kč

únor: $100\,000 \cdot 1,4 = 140\,000$ Kč

březen: $0,7 \cdot 140\,000 = 98\,000$ Kč

duben: $0,9 \cdot 98\,000 = 88\,200$ Kč

---

duben: $0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$ Kč

Celková průměrná změna musí být taková, abychom po jejím trojím provedení dostali ze 100 000 Kč částku 88 200 Kč.

$\bar{x}\ldots$ průměrná měsíční změna

(ve formě násobícího koeficientu, viz čísla 0.9, 0.7, 1.4):

$$88\,200 = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot 100\,000$$
$$88\,200 = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4 \cdot 100\,000$$
$$(\bar{x})^3 = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4$$
$$\bar{x} = \sqrt[3]{0,9 \cdot 0,7 \cdot 1,4}$$

Geometrický průměr

Geometrický průměr

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n kladných hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Potom geometrickým průměrem $\overline{x_G}$ z těchto hodnot nazýváme číslo vypočtené ze vztahu

$$\overline{x_G} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Geometrický průměr

Geometrický průměr

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n kladných hodnot $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Potom geometrickým průměrem $\overline{x_G}$ z těchto hodnot nazýváme číslo vypočtené ze vztahu

$$\overline{x_G} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Vážený geometrický průměr

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n kladných hodnot $x_1,\ x_2, \dots, x_k$ s absolutními, resp. relativními četnostmi $n_1, \dots, n_k$, resp. $p_1, \dots, p_k$. Potom geometrický průměr $\overline{x_G}$ z těchto hodnot vypočteme pomocí vzorců

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}},$$

resp.

$$\bar{x}_G = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}.$$

Geometrický průměr

Geometrický průměr

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n kladných hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Potom geometrickým průměrem $\overline{x_G}$ z těchto hodnot nazýváme číslo vypočtené ze vztahu

$$\overline{x_G} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Vážený geometrický průměr

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n kladných hodnot $x_1,\ x_2, \ldots, x_k$ s absolutními, resp. relativními četnostmi $n_1, \ldots, n_k$, resp. $p_1, \ldots, p_k$. Potom geometrický průměr $\overline{x_G}$ z těchto hodnot vypočteme pomocí vzorců

$$\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}},$$

resp.

$$\overline{x}_G = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}.$$

Geometrický průměr můžeme použít např. právě k výpočtu průměrné procentní míry změny, která je vypočítávána z rozličných na sebe navazujících základů.

Použití geometrického průměru

Příklad 2: prostý geometrický průměr

Vypočtěte geometrický průměr hodnot 1.2, 3.1, 2.4, 1.8 a 0.6.

Použití geometrického průměru

Příklad 2: prostý geometrický průměr

Vypočtěte geometrický průměr hodnot 1.2, 3.1, 2.4, 1.8 a 0.6.

$$\overline{x}_G = \sqrt[5]{1.2 \cdot 3.1 \cdot 2.4 \cdot 1.8 \cdot 0.6} = \sqrt[5]{9.64224} \doteq 1.573$$

Použití geometrického průměru

Příklad 2: prostý geometrický průměr

Vypočtěte geometrický průměr hodnot 1.2, 3.1, 2.4, 1.8 a 0.6.

$$\overline{x}_G = \sqrt[5]{1.2 \cdot 3.1 \cdot 2.4 \cdot 1.8 \cdot 0.6} = \sqrt[5]{9.64224} \doteq 1.573$$

Příklad 3: vážený geometrický průměr (absolutní četnosti)

Vypočtěte geometrický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností jednotlivých hodnot:

x_i	1.05	1.02	0.98	0.82
n_i	2	1	2	3

Použití geometrického průměru

Příklad 2: prostý geometrický průměr

Vypočtěte geometrický průměr hodnot 1.2, 3.1, 2.4, 1.8 a 0.6.

$$\overline{x}_G = \sqrt[5]{1.2 \cdot 3.1 \cdot 2.4 \cdot 1.8 \cdot 0.6} = \sqrt[5]{9.64224} \doteq 1.573$$

Příklad 3: vážený geometrický průměr (absolutní četnosti)

Vypočtěte geometrický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností jednotlivých hodnot:

x_i	1.05	1.02	0.98	0.82
n_i	2	1	2	3

$$\overline{x}_G = \sqrt[8]{1.05^2 \cdot 1.02 \cdot 0.98^2 \cdot 0.82^3} = 0.937$$

Použití geometrického průměru

Příklad 4: vážený geometrický průměr (relativní četnosti)

Vypočtěte geometrický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností jednotlivých hodnot:

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.1	0.4	0.3

Použití geometrického průměru

Příklad 4: vážený geometrický průměr (relativní četnosti)

Vypočtěte geometrický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností jednotlivých hodnot:

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.1	0.4	0.3

$$\overline{x}_G = 2^{0.2} \cdot 3^{0.1} \cdot 4^{0.4} \cdot 5^{0.3} \doteq 3.618$$

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

$\bar{x}$ . . . průměrné zhodnocení (ve formě násobícího koeficientu) za jedno úrokovací období

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

$\bar{x}$ . . . průměrné zhodnocení (ve formě násobícího koeficientu) za jedno úrokovací období

A . . . částka na počátku

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

$\bar{x}$ ... průměrné zhodnocení (ve formě násobícího koeficientu) za jedno úrokovací období

A ... částka na počátku

$1,2 \cdot A$ ... částka po deseti úrokovacích obdobích (částka A zvětšená o 20 %)

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

$\bar{x}$ ... průměrné zhodnocení (ve formě násobícího koeficientu) za jedno úrokovací období

A ... částka na počátku

$1,2 \cdot A$ ... částka po deseti úrokovacích obdobích (částka A zvětšená o $20\ \%$)

$$1,2 \cdot A = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \ldots \cdot \bar{x} \cdot A$$

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

$\bar{x}$ ... průměrné zhodnocení (ve formě násobícího koeficientu) za jedno úrokovací období

A ... částka na počátku

$1,2 \cdot A$ ... částka po deseti úrokovacích obdobích (částka A zvětšená o 20 %)

$$1,2 \cdot A = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \ldots \cdot \bar{x} \cdot A$$
$$1,2 = (\bar{x})^{10}$$

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

$\bar{x}$ ... průměrné zhodnocení (ve formě násobícího koeficientu) za jedno úrokovací období

A ... částka na počátku

$1,2 \cdot A$ ... částka po deseti úrokovacích obdobích (částka A zvětšená o $20\ \%$)

$$\begin{aligned} 1,2 \cdot A &= \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \ldots \cdot \bar{x} \cdot A \\ 1,2 &= (\bar{x})^{10} \\ \bar{x} &= \sqrt[10]{1,2} \end{aligned}$$

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

$\bar{x}$ ... průměrné zhodnocení (ve formě násobícího koeficientu) za jedno úrokovací období

A ... částka na počátku

$1,2 \cdot A$ ... částka po deseti úrokovacích obdobích (částka A zvětšená o $20\ \%$)

$$\begin{aligned} 1,2 \cdot A &= \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \ldots \cdot \bar{x} \cdot A \\ 1,2 &= (\bar{x})^{10} \\ \bar{x} &= \sqrt[10]{1,2} \\ \bar{x} &\doteq 1,0184 \end{aligned}$$

Použití geometrického průměru

Příklad 5: použití geometrického průměru

Banka nabízí zhodnocení vložených finančních prostředků o 20 % za 10 let. Jaká je skutečná roční úroková míra nabízená bankou?

$\bar{x}$ ... průměrné zhodnocení (ve formě násobícího koeficientu) za jedno úrokovací období

A ... částka na počátku

$1,2 \cdot A$ ... částka po deseti úrokovacích obdobích (částka A zvětšená o $20\ \%$)

$$
\begin{aligned}
1,2 \cdot A &= \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \ldots \cdot \bar{x} \cdot A \\
1,2 &= (\bar{x})^{10} \\
\bar{x} &= \sqrt[10]{1,2} \\
\bar{x} &\doteq 1,0184
\end{aligned}
$$

Skutečná roční úroková míra činí $i \doteq 1,84\ \%$ *p.a.*

Úlohy k samostatné práci

Příklad 6: geometrický průměr

Vypočtěte geometrický průměr hodnot 0.45, 1.21, 0.78, 2.31, 0.32, 1.24 a 2.34.

Příklad 7: geometrický průměr

Vypočtěte geometrický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností jednotlivých hodnot:

x_i	0.95	0.98	1.12	1.25	1.54	1.75
n_i	2	3	4	4	3	2

Příklad 8: geometrický průměr

Vypočtěte geometrický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností jednotlivých hodnot:

x_i	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
p_i	0.2	0.1	0.4	0.2	0.1

Příklad 9: použití geometrického průměru

Průměrná hrubá mzda v ČR v roce 2010 byla 23 864 Kč, v roce 2019 činila 34 125 Kč (dle předběžných dat). O kolik procent ročně průměrně rostla tato mzda v uvedených letech?

Příklad 4

Auto jelo z UL do Prahy (tedy 100 km) průměrnou rychlostí 80 km/h. Zpět z Prahy do UL (tedy opět 100 km) jelo průměrnou rychlostí 120 km/h. Jaká byla průměrná rychlost v obou cestách dohromady?

Harmonický průměr

Příklad 4

Auto jelo z UL do Prahy (tedy 100 km) průměrnou rychlostí 80 km/h. Zpět z Prahy do UL (tedy opět 100 km) jelo průměrnou rychlostí 120 km/h. Jaká byla průměrná rychlost v obou cestách dohromady?

Příklad 5

Jak by se změnil předchozí výpočet v případě, že auto by různými průměrnými rychlostmi projíždělo tři stejně dlouhé úseky?

Harmonický průměr

Příklad 4

Auto jelo z UL do Prahy (tedy 100 km) průměrnou rychlostí 80 km/h. Zpět z Prahy do UL (tedy opět 100 km) jelo průměrnou rychlostí 120 km/h. Jaká byla průměrná rychlost v obou cestách dohromady?

Příklad 5

Jak by se změnil předchozí výpočet v případě, že auto by různými průměrnými rychlostmi projíždělo tři stejně dlouhé úseky?

Harmonický průměr

Mějme kvantitativní veličinu X s hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Harmonickým průměrem hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazveme číslo

$$\overline{x_H} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Výpočet průměrů

Vážený harmonický průměr - absolutní četnosti

Mějme kvantitativní veličinu X s n hodnotami $x_1, x_2, \dots, x_k$, kde čísla $n_1, n_2, \dots, n_k$ představují absolutní četnosti hodnot $x_1, \dots, x_k$. Potom harmonický průměr vypočteme pomocí vzorce

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \dots + \frac{n_k}{x_k}}.$$

Výpočet průměrů

Vážený harmonický průměr - absolutní četnosti

Mějme kvantitativní veličinu X s n hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_k$, kde čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ představují absolutní četnosti hodnot $x_1, \ldots, x_k$. Potom harmonický průměr vypočteme pomocí vzorce

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \cdots + \frac{n_k}{x_k}}.$$

Vážený harmonický průměr - relativní četnosti

Mějme kvantitativní veličinu X s n hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_k$, kde čísla $p_1, p_2, \ldots, p_k$ představují relativní četnosti hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Potom harmonický průměr vypočteme pomocí vzorce

$$\overline{x}_H = \frac{1}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \cdots + \frac{p_k}{x_k}}.$$

Harmonický průměr

Příklad 6

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	20	25	30	35	40
n_i	3	4	5	2	1

Harmonický průměr

Příklad 6

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	20	25	30	35	40
n_i	3	4	5	2	1

$$\overline{x}_H = \frac{3+4+5+2+1}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

Harmonický průměr

Příklad 6

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	20	25	30	35	40
n_i	3	4	5	2	1

$$\overline{x}_H = \frac{3+4+5+2+1}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

Harmonický průměr

Příklad 6

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	20	25	30	35	40
n_i	3	4	5	2	1

$$\overline{x}_H = \frac{3+4+5+2+1}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{630}{4\,200}+\frac{672}{4\,200}+\frac{700}{4\,200}+\frac{240}{4\,200}+\frac{105}{4\,200}}$$

Harmonický průměr

Příklad 6

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	20	25	30	35	40
n_i	3	4	5	2	1

$$\overline{x}_H = \frac{3+4+5+2+1}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{630}{4\,200}+\frac{672}{4\,200}+\frac{700}{4\,200}+\frac{240}{4\,200}+\frac{105}{4\,200}}$$

$$= \frac{15}{\frac{2\,347}{4\,200}}$$

Harmonický průměr

Příklad 6

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	20	25	30	35	40
n_i	3	4	5	2	1

$$\overline{x}_H = \frac{3+4+5+2+1}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{630}{4\,200}+\frac{672}{4\,200}+\frac{700}{4\,200}+\frac{240}{4\,200}+\frac{105}{4\,200}}$$

$$= \frac{15}{\frac{2\,347}{4\,200}} = \frac{15 \cdot 4\,200}{2\,347}$$

Harmonický průměr

Příklad 6

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	20	25	30	35	40
n_i	3	4	5	2	1

$$\overline{x}_H = \frac{3+4+5+2+1}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{630}{4\,200}+\frac{672}{4\,200}+\frac{700}{4\,200}+\frac{240}{4\,200}+\frac{105}{4\,200}}$$

$$= \frac{15}{\frac{2\,347}{4\,200}} = \frac{15\cdot 4\,200}{2\,347} = \frac{63\,000}{2\,347}$$

Harmonický průměr

Příklad 6

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	20	25	30	35	40
n_i	3	4	5	2	1

$$\bar{x}_H = \frac{3+4+5+2+1}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{3}{20}+\frac{4}{25}+\frac{5}{30}+\frac{2}{35}+\frac{1}{40}}$$

$$= \frac{15}{\frac{630}{4\,200}+\frac{672}{4\,200}+\frac{700}{4\,200}+\frac{240}{4\,200}+\frac{105}{4\,200}}$$

$$= \frac{15}{\frac{2\,347}{4\,200}} = \frac{15\cdot 4\,200}{2\,347} = \frac{63\,000}{2\,347} \doteq 26.84$$

Harmonický průměr

Příklad 7

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s rozdělením četností hodnot:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0.2	0.3	0.2	0.2	0.1

Harmonický průměr

Příklad 7

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s rozdělením četností hodnot:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0.2	0.3	0.2	0.2	0.1

$$\overline{x}_H = \frac{1}{\frac{0.2}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0.2}{6} + \frac{0.1}{7}}$$

Příklad 7

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s rozdělením četností hodnot:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0.2	0.3	0.2	0.2	0.1

$$\overline{x}_H = \frac{1}{\frac{0.2}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0.2}{6} + \frac{0.1}{7}}$$

$$= \frac{1}{\frac{280}{4\,200} + \frac{315}{4\,200} + \frac{168}{4\,200} + \frac{140}{4\,200} + \frac{60}{4\,200}}$$

Harmonický průměr

Příklad 7

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s rozdělením četností hodnot:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0.2	0.3	0.2	0.2	0.1

$$\overline{x}_H = \frac{1}{\frac{0.2}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0.2}{6} + \frac{0.1}{7}}$$

$$= \frac{1}{\frac{280}{4\,200} + \frac{315}{4\,200} + \frac{168}{4\,200} + \frac{140}{4\,200} + \frac{60}{4\,200}}$$

$$= \frac{1}{\frac{963}{4\,200}}$$

Příklad 7

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s rozdělením četností hodnot:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0.2	0.3	0.2	0.2	0.1

$$\overline{x}_H = \frac{1}{\frac{0.2}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0.2}{6} + \frac{0.1}{7}}$$

$$= \frac{1}{\frac{280}{4\,200} + \frac{315}{4\,200} + \frac{168}{4\,200} + \frac{140}{4\,200} + \frac{60}{4\,200}}$$

$$= \frac{1}{\frac{963}{4\,200}} = \frac{4\,200}{963}$$

Harmonický průměr

Příklad 7

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s rozdělením četností hodnot:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0.2	0.3	0.2	0.2	0.1

$$\overline{x}_H = \frac{1}{\frac{0.2}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0.2}{6} + \frac{0.1}{7}}$$

$$= \frac{1}{\frac{280}{4\,200} + \frac{315}{4\,200} + \frac{168}{4\,200} + \frac{140}{4\,200} + \frac{60}{4\,200}}$$

$$= \frac{1}{\frac{963}{4\,200}} = \frac{4\,200}{963} \doteq 4.36$$

Výpočet průměrů

Příklad 8

Vypočtěte aritmetický, geometrický a harmonický průměr z hodnot $1, 2, 4$.

Výpočet průměrů

Příklad 8

Vypočtěte aritmetický, geometrický a harmonický průměr z hodnot $1, 2, 4$.

$$\overline{x} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,\overline{3}$$

Výpočet průměrů

Příklad 8

Vypočtěte aritmetický, geometrický a harmonický průměr z hodnot $1, 2, 4$.

$$\overline{x} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,\overline{3}$$

$$\overline{x_G} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Výpočet průměrů

Příklad 8

Vypočtěte aritmetický, geometrický a harmonický průměr z hodnot $1, 2, 4$.

$$\overline{x} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,\overline{3}$$

$$\overline{x_G} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\overline{x_H} = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{4+2+1}{4}} = \frac{12}{7} \doteq 1,714$$

Výpočet průměrů

Příklad 8

Vypočtěte aritmetický, geometrický a harmonický průměr z hodnot $1, 2, 4$.

$$\overline{x} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,\overline{3}$$

$$\overline{x_G} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\overline{x_H} = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{4+2+1}{4}} = \frac{12}{7} \doteq 1,714$$

Povšimněte si nerovnosti mezi průměry: $\overline{x_H} \leq \overline{x_G} \leq \overline{x}$.

Výpočet průměrů

Příklad 8

Vypočtěte aritmetický, geometrický a harmonický průměr z hodnot $1, 2, 4$.

$$\overline{x} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,\overline{3}$$

$$\overline{x_G} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\overline{x_H} = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{4+2+1}{4}} = \frac{12}{7} \doteq 1,714$$

Povšimněte si nerovnosti mezi průměry: $\overline{x_H} \leq \overline{x_G} \leq \overline{x}$.

Nerovnosti mezi průměry

Mějme kvantitativní veličinu X a předpokládejme, že známe aritmetický průměr $\overline{x}$, geometrický průměr $\overline{x}_G$ a harmonický průměr $\overline{x}_H$ z hodnot této veličiny. Potom platí následující nerovnosti:

$$\overline{x}_H \leq \overline{x}_G \leq \overline{x},$$

přičemž rovnost mezi průměry platí pouze v případě, že jsou všechny hodnoty x_i shodné.

Použití nerovností mezi průměry

Příklad 9: nákup akcií I

V každém čtvrtletí koupil John Villiani 100 akcií jisté společnosti za tyto ceny:

čtvrtletí	cena za akcii
1	8 dolarů
2	8 dolarů
3	10 dolarů
4	5 dolarů

Jaké byly průměrné náklady Johna na 1 akcii?

Použití nerovností mezi průměry

Příklad 9: nákup akcií I

V každém čtvrtletí koupil John Villiani 100 akcií jisté společnosti za tyto ceny:

čtvrtletí	cena za akcii
1	8 dolarů
2	8 dolarů
3	10 dolarů
4	5 dolarů

Jaké byly průměrné náklady Johna na 1 akcii?

Příklad 10: nákup akcií II

Susan Yorková kupuje akcie jiným způsobem. Každé čtvrtletí investuje 800 dolarů do nákupu tolika akcií, kolik lze koupit za momentální cenu.

čtvrtletí	cena za akcii
1	8 dolarů
2	8 dolarů
3	10 dolarů
4	5 dolarů

Jaké budou její průměrné náklady na jednu akcii?

Kdy lze použít daný typ průměru?

Aritmetický průměr

Auto jede 1 hodinu rychlostí 80 km/h, pak jede 1 hodinu rychlostí 120 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost za celou dobu?

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{80 \cdot 1 + 120 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{80 + 120}{2}$$

Kdy lze použít daný typ průměru?

Aritmetický průměr

Auto jede 1 hodinu rychlostí 80 km/h, pak jede 1 hodinu rychlostí 120 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost za celou dobu?

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{80 \cdot 1 + 120 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{80 + 120}{2}$$

Jak nakupoval John?

$$\overline{P} = \frac{P}{N} = \frac{800 + 800 + 1000 + 500}{100 + 100 + 100 + 100} = \frac{8 + 8 + 10 + 5}{4}$$

Kdy lze použít daný typ průměru?

Aritmetický průměr

Auto jede 1 hodinu rychlostí 80 km/h, pak jede 1 hodinu rychlostí 120 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost za celou dobu?

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{80 \cdot 1 + 120 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{80 + 120}{2}$$

Jak nakupoval John?

$$\overline{P} = \frac{P}{N} = \frac{800 + 800 + 1000 + 500}{100 + 100 + 100 + 100} = \frac{8 + 8 + 10 + 5}{4}$$

Harmonický průměr

Auto jede 100 km rychlostí 80 km/h, pak jede 100km rychlostí 120 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost za celou jízdu?

$$\overline{v} = \frac{S}{t} = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{s + s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{100 + 100}{\frac{100}{80} + \frac{100}{120}} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}}$$

Kdy lze použít daný typ průměru?

Aritmetický průměr

Auto jede 1 hodinu rychlostí 80 km/h, pak jede 1 hodinu rychlostí 120 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost za celou dobu?

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{80 \cdot 1 + 120 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{80 + 120}{2}$$

Jak nakupoval John?

$$\overline{P} = \frac{P}{N} = \frac{800 + 800 + 1000 + 500}{100 + 100 + 100 + 100} = \frac{8 + 8 + 10 + 5}{4}$$

Harmonický průměr

Auto jede 100 km rychlostí 80 km/h, pak jede 100km rychlostí 120 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost za celou jízdu?

$$\overline{v} = \frac{S}{t} = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{s + s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{100 + 100}{\frac{100}{80} + \frac{100}{120}} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}}$$

Jak nakupovala Susan?

$$\overline{P} = \frac{P}{N} = \frac{800 + 800 + 800 + 800}{\frac{800}{8} + \frac{800}{8} + \frac{800}{10} + \frac{800}{5}} = \frac{4}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}}$$

Úlohy k samostatné práci

Příklad 1

Vypočtěte harmonický průměr z hodnot $5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Příklad 2

Vypočtěte harmonický průměr veličiny s následujícím rozdělením četností hodnot:

x_i	5	6	7	8	9
n_i	2	3	5	3	2

resp.

x_i	2	4	6	8	10
p_i	$0,1$	$0,3$	$0,2$	$0,3$	$0,1$

Příklad 3

Tři dělníci v dílně se zabývají výrobou stejných výrobků. Prvnímu z nich trvá zhotovení výrobku 5 minut, druhému 10 minut a třetímu 15 minut. Jaká doba je průměrně zapotřebí k zhotovení jednoho výrobku?

Příklad 4

Technické služby města mají k dispozici šest zametacích strojů typu A, čtyři stroje typu B a jeden stroj typu C. Stroj typu A zamete 1 km silnice za 20 minut, stroj typu B za 30 minut a stroj typu C za 40 minut. Jaká doba je v průměru potřeba k vyčištění jednoho kilometru silnice, pracují-li všechny stroje najednou?