Statistika I (KMI/PSTAT)

Cvičení třetí

aneb

Míry polohy a variability (obecné a centrované momenty)

Co se dnes naučíme

Po absolvování této hodiny byste měli být schopni:

- chápat význam pojmu *míra polohy* v popisné statistice,
- rozumět pojmu *první obecný moment* (aritmetický průměr) a umět jej vypočítat jak v prostém, tak i váženém tvaru pomocí absolutních i relativních četností,
- vypočítat *druhý obecný moment* jak v prostém, tak i váženém tvaru,
- chápat význam pojmu *míra variability*,
- rozumět pojmu *druhý centrovaný moment* (rozptyl) a umět jej vypočítat jak podle definice, tak i podle výpočtového vzorce,
- interpretovat pojem *směrodatná odchylka* a umět ji vypočítat,
- interpretovat pojem *variační koeficient*, umět jej vypočítat.

První obecný moment

První obecný moment - aritmetický průměr

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom první obecný moment X^1 (nebo též $\overline{X}$) veličiny X vypočteme ze vztahu

$$X^1 = \overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) .$$

První obecný moment často nazýváme také *střední hodnota* veličiny X, resp. *aritmetický průměr* veličiny X.

První obecný moment

První obecný moment - aritmetický průměr

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom první obecný moment X^1 (nebo též $\overline{X}$) veličiny X vypočteme ze vztahu

$$X^1 = \overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \, .$$

První obecný moment často nazýváme také *střední hodnota* veličiny X, resp. *aritmetický průměr* veličiny X.

V rámci dotazníkového šetření byla zjišťována výše měsíčního kapesného přítomných studentů. Zjištěné hodnoty jsou:

student č.	1	2	3	4	5	6	7	8
kapesné [Kč]	2 600	5 000	3 000	100	1 500	7 000	4 000	3 200

student č.	9	10	11	12	13	14	15	16
kapesné [Kč]	5 500	4 200	4 000	1 800	2 500	3 400	4 200	3 600

Vypočtěte první obecný moment veličiny „průměrné měsíční kapesné“.

První obecný moment - s absolutními četnostmi

V rámci dotazníkového šetření se zjišťovalo, kolik hodin denně stráví respondenti z řad studentů na některé ze sociálních sítí. Bylo zjištěno, že ve skupině 50 studentů 7 z nich nejsou na žádné sociální síti, 10 studentů stráví na sociálních sítích 1 hodinu denně, 16 studentů 2 hodiny denně, 11 studentů 3 hodiny denně a zbytek je na sociálních sítích 4 hodiny denně. Sestavte tabulku rozdělení četností veličiny počet hodin strávených na sociálních sítích denně a vypočtěte první obecný moment této veličiny.

První obecný moment - s absolutními četnostmi

V rámci dotazníkového šetření se zjišťovalo, kolik hodin denně stráví respondenti z řad studentů na některé ze sociálních sítí. Bylo zjištěno, že ve skupině 50 studentů 7 z nich nejsou na žádné sociální síti, 10 studentů stráví na sociálních sítích 1 hodinu denně, 16 studentů 2 hodiny denně, 11 studentů 3 hodiny denně a zbytek je na sociálních sítích 4 hodiny denně. Sestavte tabulku rozdělení četností veličiny počet hodin strávených na sociálních sítích denně a vypočtěte první obecný moment této veličiny.

Shrnutí

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_k$, kde prostá abolutní četnost hodnoty x_1 je rovna n_1, prostá abolutní četnost hodnoty x_2 je rovna n_2 atd. Potom první obecný moment X^1 veličiny X vypočteme ze vztahu

$$X^1 = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i x_i)}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n}.$$

Čísla n_i nazýváme váhami hodnot x_i a takto vypočtenou hodnotu nazýváme (vážený) první obecný moment.

První obecný moment - s absolutními četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny. Vypočtěte její první obecný moment.

x_i	5	6	7	8	9	10
n_i	8	3	4	5	2	8

První obecný moment - s absolutními četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny. Vypočtěte její první obecný moment.

x_i	5	6	7	8	9	10
n_i	8	3	4	5	2	8

Příklad

Dopočítejte zbylé četnosti v předchozím příkladu a dopočítejte první obecný moment podle prostých relativních četností.

První obecný moment - s absolutními četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny. Vypočtěte její první obecný moment.

x_i	5	6	7	8	9	10
n_i	8	3	4	5	2	8

Příklad

Dopočítejte zbylé četnosti v předchozím příkladu a dopočítejte první obecný moment podle prostých relativních četností.

Shrnutí

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_k$, kde prostá relativní četnost hodnoty x_1 je rovna p_1, prostá relativní četnost hodnoty x_2 je rovna p_2 atd. Potom první obecný moment X^1 veličiny X vypočteme ze vztahu

$$X^1 = \overline{X} = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_k x_k.$$

První obecný moment - příklady k procvičení

Příklad

Na jistém úseku dálnice byl po delší dobu sledován počet dopravních nehod za jeden týden. V 5 % případů se během týdne staly čtyři nehody, v 15 % se během týdne staly tři nehody, v 23 % se během týdne staly dvě nehody, v 37 % případů se stala jedna nehoda a ve zbytku případů se během týdne nestala ani jedna nehoda. Vypočtěte průměrný počet nehod za jeden týden.

Příklad NDU 01

V rámci experimentu byly měřeny hodnoty veličiny X. Byla přitom zjištěna tato data: 10.2, 15.2, 14.3, 12.9, 16.3, 11.7, 12.9, 16.8, 13.7, 12.6, 14.3, 15.3, 17.3, 14.7, 15.5, 16.1, 17.7, 15.1, 16.0, 14.2, 13.9, 14.1, 12.9, 14.4, 13.5. Vypočtěte první obecný moment veličiny X.

Příklad NDU 02

Vypočtěte průměrný počet dětí v bytech o velikosti 2+1 z příkladu s kontingenční tabulkou v prezentaci z druhého týdne výuky.

Příklad NDU 03

Při měření spolehlivosti zařízení se testoval počet poruch vybraných strojů během měsíce. Bylo zjištěno, že 17 % strojů se během měsíce porouchalo dvakrát, 31 % strojů mělo během měsíce 5 poruch, 21 % strojů mělo 3 poruchy a zbytek strojů pracoval bez závad. Vypočtěte průměrný počet (tj. první obecný moment) poruch uvedených strojů během sledovaného měsíce.

Druhý obecný moment

Druhý obecný moment

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n hodnot x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Potom druhý obecný moment X^2 veličiny X vypočteme ze vztahu

$$X^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}.$$

Druhý obecný moment

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n hodnot x_1, $x_2, \ldots, x_k$ s absolutními, resp. relativními četnostmi $n_1, \ldots, n_k$, resp. $p_1, \ldots, p_k$. Potom druhý obecný moment veličiny X je roven

$$X^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_k x_k^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_k x_k^2}{n},$$

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_k x_k^2.$$

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

$$\overline{X} = \frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 7}{20}$$

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

$$\overline{X} = \frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 7}{20} = \frac{18 + 12 + 25 + 24 + 14}{20} = \frac{93}{20} = 4,65$$

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

$$\overline{X} = \frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 7}{20} = \frac{18 + 12 + 25 + 24 + 14}{20} = \frac{93}{20} = 4,65$$

$$\overline{X} = 0,3 \cdot 3 + 0,15 \cdot 4 + 0,25 \cdot 5 + 0,2 \cdot 6 + 0,1 \cdot 7$$

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

$$\overline{X} = \frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 7}{20} = \frac{18 + 12 + 25 + 24 + 14}{20} = \frac{93}{20} = 4,65$$

$$\overline{X} = 0,3 \cdot 3 + 0,15 \cdot 4 + 0,25 \cdot 5 + 0,2 \cdot 6 + 0,1 \cdot 7 = 0,9 + 0,6 + 1,25 + 1,2 + 0,7 = 4,65$$

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

$$\overline{X} = \frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 7}{20} = \frac{18 + 12 + 25 + 24 + 14}{20} = \frac{93}{20} = 4,65$$

$$\overline{X} = 0,3 \cdot 3 + 0,15 \cdot 4 + 0,25 \cdot 5 + 0,2 \cdot 6 + 0,1 \cdot 7 = 0,9 + 0,6 + 1,25 + 1,2 + 0,7 = 4,65$$

$$X^2 = \frac{6 \cdot 9 + 3 \cdot 16 + 5 \cdot 25 + 4 \cdot 36 + 2 \cdot 49}{20}$$

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

$$\overline{X} = \frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 7}{20} = \frac{18 + 12 + 25 + 24 + 14}{20} = \frac{93}{20} = 4,65$$

$$\overline{X} = 0,3 \cdot 3 + 0,15 \cdot 4 + 0,25 \cdot 5 + 0,2 \cdot 6 + 0,1 \cdot 7 = 0,9 + 0,6 + 1,25 + 1,2 + 0,7 = 4,65$$

$$X^2 = \frac{6 \cdot 9 + 3 \cdot 16 + 5 \cdot 25 + 4 \cdot 36 + 2 \cdot 49}{20} = \frac{54 + 48 + 125 + 144 + 98}{20} = \frac{469}{20} = 23,45$$

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

$$\overline{X} = \frac{6\cdot 3 + 3\cdot 4 + 5\cdot 5 + 4\cdot 6 + 2\cdot 7}{20} = \frac{18+12+25+24+14}{20} = \frac{93}{20} = 4,65$$

$$\overline{X} = 0,3\cdot 3 + 0,15\cdot 4 + 0,25\cdot 5 + 0,2\cdot 6 + 0,1\cdot 7 = 0,9 + 0,6 + 1,25 + 1,2 + 0,7 = 4,65$$

$$X^2 = \frac{6\cdot 9 + 3\cdot 16 + 5\cdot 25 + 4\cdot 36 + 2\cdot 49}{20} = \frac{54+48+125+144+98}{20} = \frac{469}{20} = 23,45$$

$$X^2 = 0,3\cdot 9 + 0,15\cdot 16 + 0,25\cdot 25 + 0,2\cdot 36 + 0,1\cdot 49$$

Druhý obecný moment - s četnostmi

Příklad

Je dána část tabulky rozdělení četností jisté veličiny.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	6	3	5	4	2

Doplňte tabulku a vypočtěte první a druhý obecný moment podle absolutních i relativních četností.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	6	3	5	4	2	20
p_i	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1	1

$$\overline{X} = \frac{6\cdot 3 + 3\cdot 4 + 5\cdot 5 + 4\cdot 6 + 2\cdot 7}{20} = \frac{18+12+25+24+14}{20} = \frac{93}{20} = 4,65$$

$$\overline{X} = 0,3\cdot 3 + 0,15\cdot 4 + 0,25\cdot 5 + 0,2\cdot 6 + 0,1\cdot 7 = 0,9 + 0,6 + 1,25 + 1,2 + 0,7 = 4,65$$

$$X^2 = \frac{6\cdot 9 + 3\cdot 16 + 5\cdot 25 + 4\cdot 36 + 2\cdot 49}{20} = \frac{54+48+125+144+98}{20} = \frac{469}{20} = 23,45$$

$$X^2 = 0,3\cdot 9 + 0,15\cdot 16 + 0,25\cdot 25 + 0,2\cdot 36 + 0,1\cdot 49 = 2,7 + 2,4 + 6,25 + 7,2 + 4,9 = 23,45$$

Míry variability

Druhý centrovaný moment

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n hodnot x_1, $x_2, \dots, x_n$. Potom druhý centrovaný moment M_2 (neboli rozptyl) veličiny X vypočteme ze vztahu

$$M_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \overline{X}\right)^2}{n}.$$

Druhý centrovaný moment

Předpokládejme, že kvantitativní veličina X nabývá n hodnot x_1, $x_2, \dots, x_k$ s absolutními, resp. relativními četnostmi $n_1, \dots, n_k$, resp. $p_1, \dots, p_k$. Potom druhý centrovaný moment veličiny X je roven

$$M_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} = \frac{n_1 \left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + n_2 \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + n_k \left(x_k - \overline{X}\right)^2}{n},$$

$$M_2 = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 = p_1 \left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + p_2 \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + p_k \left(x_k - \overline{X}\right)^2.$$

Druhý centrovaný moment

Příklad

S použitím uvedené tabulky vypočtěte druhý centrovaný moment veličiny X.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
n_i	4	2	6	6	2	20
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	1

Druhý centrovaný moment

Příklad

S použitím uvedené tabulky vypočtěte druhý centrovaný moment veličiny X.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
n_i	4	2	6	6	2	20
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	1

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{4\cdot(3-5)^2 + 2\cdot(4-5)^2 + 6\cdot(5-5)^2 + 6\cdot(6-5)^2 + 2\cdot(7-5)^2}{20} \\ &= \frac{4\cdot 4 + 2\cdot 1 + 6\cdot 0 + 6\cdot 1 + 2\cdot 4}{20} = \frac{16+2+0+6+8}{20} = \frac{32}{20} = 1,6 \end{aligned}$$

Druhý centrovaný moment

Příklad

S použitím uvedené tabulky vypočtěte druhý centrovaný moment veličiny X.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
n_i	4	2	6	6	2	20
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	1

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{4 \cdot (3-5)^2 + 2 \cdot (4-5)^2 + 6 \cdot (5-5)^2 + 6 \cdot (6-5)^2 + 2 \cdot (7-5)^2}{20} \\ &= \frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{20} = \frac{16+2+0+6+8}{20} = \frac{32}{20} = 1,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= 0,2 \cdot (3-5)^2 + 0,1 \cdot (4-5)^2 + 0,3 \cdot (5-5)^2 + 0,3 \cdot (6-5)^2 + 0,1 \cdot (7-5)^2 \\ &= 0,2 \cdot 4 + 0,1 \cdot 1 + 0,3 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 + 0,1 \cdot 4 = 0,8 + 0,1 + 0 + 0,3 + 0,4 = 1,6 \end{aligned}$$

Druhý centrovaný moment

Příklad

S použitím uvedené tabulky vypočtěte druhý centrovaný moment veličiny X.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
n_i	4	2	6	6	2	20
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	1

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{4\cdot(3-5)^2+2\cdot(4-5)^2+6\cdot(5-5)^2+6\cdot(6-5)^2+2\cdot(7-5)^2}{20} \\ &= \frac{4\cdot4+2\cdot1+6\cdot0+6\cdot1+2\cdot4}{20} = \frac{16+2+0+6+8}{20} = \frac{32}{20} = 1,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= 0,2\cdot(3-5)^2+0,1\cdot(4-5)^2+0,3\cdot(5-5)^2+0,3\cdot(6-5)^2+0,1\cdot(7-5)^2 \\ &= 0,2\cdot4+0,1\cdot1+0,3\cdot0+0,3\cdot1+0,1\cdot4 = 0,8+0,1+0+0,3+0,4 = 1,6 \end{aligned}$$

Druhý centrovaný moment veličiny X je roven $M_2 = 1,6$.

Druhý centrovaný moment - rozptyl

Výpočetní vzorec rozptylu

Rozptyl veličiny lze také vypočítat pomocí vzorce

$$M_2 = X^2 - \left(\overline{X}\right)^2 .$$

Druhý centrovaný moment - rozptyl

Výpočetní vzorec rozptylu

Rozptyl veličiny lze také vypočítat pomocí vzorce

$$M_2 = X^2 - \left(\overline{X}\right)^2 .$$

S použitím uvedené tabulky vypočtěte rozptyl veličiny X pomocí výpočtového vzorce pro rozptyl.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	4	2	6	6	2	20
p_i	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1	1

Druhý centrovaný moment - rozptyl

Výpočetní vzorec rozptylu

Rozptyl veličiny lze také vypočítat pomocí vzorce

$$M_2 = X^2 - \left(\overline{X}\right)^2.$$

S použitím uvedené tabulky vypočtěte rozptyl veličiny X pomocí výpočtového vzorce pro rozptyl.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	4	2	6	6	2	20
p_i	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1	1

$\overline{X} = 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.3 \cdot 6 + 0.1 \cdot 7 = 0.6 + 0.4 + 1.5 + 1.8 + 0.7 = 5$

Druhý centrovaný moment - rozptyl

Výpočetní vzorec rozptylu

Rozptyl veličiny lze také vypočítat pomocí vzorce

$$M_2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2.$$

S použitím uvedené tabulky vypočtěte rozptyl veličiny X pomocí výpočtového vzorce pro rozptyl.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	4	2	6	6	2	20
p_i	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1	1

$\overline{X} = 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.3 \cdot 6 + 0.1 \cdot 7 = 0.6 + 0.4 + 1.5 + 1.8 + 0.7 = 5$

$\overline{X^2} = 0.2 \cdot 9 + 0.1 \cdot 16 + 0.3 \cdot 25 + 0.3 \cdot 36 + 0.1 \cdot 49 = 1.8 + 1.6 + 7.5 + 10.8 + 4.9 = 26.6$

Druhý centrovaný moment - rozptyl

Výpočetní vzorec rozptylu

Rozptyl veličiny lze také vypočítat pomocí vzorce

$$M_2 = X^2 - \left(\overline{X}\right)^2 .$$

S použitím uvedené tabulky vypočtěte rozptyl veličiny X pomocí výpočtového vzorce pro rozptyl.

x_i	3	4	5	6	7	$\sum$
x_i^2	9	16	25	36	49	
n_i	4	2	6	6	2	20
p_i	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1	1

$$\overline{X} = 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.3 \cdot 6 + 0.1 \cdot 7 = 0.6 + 0.4 + 1.5 + 1.8 + 0.7 = 5$$

$$X^2 = 0.2{\cdot}9 + 0.1{\cdot}16 + 0.3{\cdot}25 + 0.3{\cdot}36 + 0.1{\cdot}49 = 1.8 + 1.6 + 7.5 + 10.8 + 4.9 = 26.6$$

$$M_2 = 26,6 - 5^2 = 26,6, -25 = 1,6$$

Míry variability

Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka s je definována jako odmocnina z rozptylu. Je tedy

$$s = \sqrt{M_2}.$$

Míry variability

Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka s je definována jako odmocnina z rozptylu. Je tedy

$$s = \sqrt{M_2}.$$

Příklad

Při atletických závodech ve skoku do výšky byli závodníci rozděleni do dvou skupin A a B. Dosažené výsledky (v cm) v obou skupinách jsou uvedeny v tabulce. Ve které skupině podávali závodníci vyrovnanější výsledky?

skupina A	210	204	198	200	196	200	206	200	204	212
skupina B	208	202	210	210	196	202	202	214	210	200

Míry variability

Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka s je definována jako odmocnina z rozptylu. Je tedy

$$s = \sqrt{M_2}.$$

Příklad

Při atletických závodech ve skoku do výšky byli závodníci rozděleni do dvou skupin A a B. Dosažené výsledky (v cm) v obou skupinách jsou uvedeny v tabulce. Ve které skupině podávali závodníci vyrovnanější výsledky?

skupina A	210	204	198	200	196	200	206	200	204	212
skupina B	208	202	210	210	196	202	202	214	210	200

Příklad

V tabulce jsou uvedeny údaje o platech zaměstnanců ve dvou firmách. Ve které firmě je mezi jednotlivými platy větší variabilita?

firma A	25 300	20 400	21 200	18 500	19 600	25 000	26 400
firma B	20 800	22 800	21 800	24 100	23 500	25 500	19 200

Míry variability

Variační koeficient

Variační koeficient V vyjadřuje podíl směrodatné odchylky na průměru (prvním obecném momentu). Po vynásobení $100\,\%$ jej vyjadřujeme v procentech.

$$V = \frac{\sqrt{M_2}}{\overline{X}} \cdot 100\,\%.$$

Míry variability

Variační koeficient

Variační koeficient V vyjadřuje podíl směrodatné odchylky na průměru (prvním obecném momentu). Po vynásobení $100\,\%$ jej vyjadřujeme v procentech.

$$V = \frac{\sqrt{M_2}}{\overline{X}} \cdot 100\,\%.$$

Příklad

Ve sledované české firmě byl zjištěn průměrný plat 30 000 Kč a odpovídající směrodatná odchylka 7 200 Kč. V podobné německé firmě činí průměrný plat 2850 euro a odpovídající směrodatná odchylka je rovna 1824 euro. Ve které firmě jsou mezi jednotlivými platy větší rozdíly? Tj. Kde je větší variabilita platů?

Míry variability

Variační koeficient

Variační koeficient V vyjadřuje podíl směrodatné odchylky na průměru (prvním obecném momentu). Po vynásobení $100\,\%$ jej vyjadřujeme v procentech.

$$V = \frac{\sqrt{M_2}}{\overline{X}} \cdot 100\,\%.$$

Příklad

Ve sledované české firmě byl zjištěn průměrný plat 30 000 Kč a odpovídající směrodatná odchylka 7 200 Kč. V podobné německé firmě činí průměrný plat 2850 euro a odpovídající směrodatná odchylka je rovna 1824 euro. Ve které firmě jsou mezi jednotlivými platy větší rozdíly? Tj. Kde je větší variabilita platů?

Příklad

Uvažujme produkci ve dvou firmách. Produkce firmy A se vykazuje v tisících kusů, produkce firmy B se vykazuje v tunách, viz tabulka. Ve které z uvedených firem byla během sledovaného období 10 dnů výroba rovnoměrnější?

pořadí dne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
firma A	1	2	2	3	4	3	2	2	3	2	24
firma B	8	7	8	10	9	9	12	11	10	8	92

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní směrodatná odchylka při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní směrodatná odchylka při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní směrodatná odchylka při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní aritmetický průměr při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní směrodatná odchylka při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní aritmetický průměr při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $\overline{X} \to c \cdot \overline{X}$

Průměr a rozptyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní směrodatná odchylka při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní aritmetický průměr při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $\overline{X} \to c \cdot \overline{X}$
- Jak se změní rozptyl při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?

Průměr a rozptyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní směrodatná odchylka při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní aritmetický průměr při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $\overline{X} \to c \cdot \overline{X}$
- Jak se změní rozptyl při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $M_2 \to c^2 \cdot M_2$

Průměr a rozpyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní směrodatná odchylka při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní aritmetický průměr při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $\overline{X} \to c \cdot \overline{X}$
- Jak se změní rozptyl při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $M_2 \to c^2 \cdot M_2$
- Jak se změní směrodatná odchylka při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?

Průměr a rozptyl při lineární transformaci dat

- Jak se změní aritmetický průměr při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - $\overline{X} \to \overline{X} + c$
- Jak se změní rozptyl při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní směrodatná odchylka při aditivní transformaci $x_i \to x_i + c$?
  - nezmění
- Jak se změní aritmetický průměr při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $\overline{X} \to c \cdot \overline{X}$
- Jak se změní rozptyl při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $M_2 \to c^2 \cdot M_2$
- Jak se změní směrodatná odchylka při multiplikativní transformaci $x_i \to c \cdot x_i$?
  - $s \to c \cdot s$

Míry variability

Příklad

Vypočtěte aritmetický průměr a rozptyl z hodnot $1, 2, 3, 4, 5$. Na základě vlastností průměru a rozptylu rozhodněte bez provádění numerických výpočtů, čemu je roven průměr a rozptyl z čísel:

- 2, 4, 6, 8, 10;
- 21, 22, 23, 24, 25;
- 10, 20, 30, 40, 50;
- 103, 106, 109, 112, 115.

Ze které pětice čísel bychom vypočítali stejný variační koeficient jako z čísel $1, 2, 3, 4, 5$?

Míry variability

Příklad

Vypočtěte aritmetický průměr a rozptyl z hodnot $1, 2, 3, 4, 5$. Na základě vlastností průměru a rozptylu rozhodněte bez provádění numerických výpočtů, čemu je roven průměr a rozptyl z čísel:

- 2, 4, 6, 8, 10;
- 21, 22, 23, 24, 25;
- 10, 20, 30, 40, 50;
- 103, 106, 109, 112, 115.

Ze které pětice čísel bychom vypočítali stejný variační koeficient jako z čísel $1, 2, 3, 4, 5$?

Příklad

Průměrný plat ve sledované firmě činí 26 500 Kč a odpovídající směrodatná odchylka má hodnotu 8 500 Kč. Jak se obě hodnoty změní, když všem zaměstnancům zvýšíme plat o $2\,000$ Kč?

Příklad

Vypočtěte aritmetický průměr a rozptyl z hodnot $1, 2, 3, 4, 5$. Na základě vlastností průměru a rozptylu rozhodněte bez provádění numerických výpočtů, čemu je roven průměr a rozptyl z čísel:

- 2, 4, 6, 8, 10;
- 21, 22, 23, 24, 25;
- 10, 20, 30, 40, 50;
- 103, 106, 109, 112, 115.

Ze které pětice čísel bychom vypočítali stejný variační koeficient jako z čísel $1, 2, 3, 4, 5$?

Příklad

Průměrný plat ve sledované firmě činí 26 500 Kč a odpovídající směrodatná odchylka má hodnotu 8 500 Kč. Jak se obě hodnoty změní, když všem zaměstnancům zvýšíme plat o $2\,000$ Kč?

Příklad

Průměrný plat ve sledované firmě činí 26 500 Kč a odpovídající směrodatná odchylka má hodnotu 8 500 Kč. Jak se obě hodnoty změní, když všem zaměstnancům zvýšíme plat o $20\,\%$?