Statistika I (KMI/PSTAT)

Cvičení druhé

aneb

Kvantily, distribuční funkce

Co se dnes naučíme

Po absolvování této hodiny byste měli být schopni:

- rozumět pojmu *modus* (modální hodnota), umět jej vypočítat a interpretovat,
- rozumět pojmu *distribuční funkce*,
- chápat význam pojmu *p% kvantil*, umět jej vypočítat na základě znalosti výčtu dat, tabulky rozdělení četností intervalového rozdělení četností a distribuční funkce
- rozumět pojmům *medián, horní a dolní kvartil, decily, percentily atd.*, umět je vypočítat a interpretovat

Modus

Modus

Modus veličiny X je hodnota znaku s nejvyšší četností, tj. nejčastější hodnota znaku. Modus veličiny X značíme symbolem $\hat{X}$.

Modus

Modus

Modus veličiny X je hodnota znaku s nejvyšší četností, tj. nejčastější hodnota znaku. Modus veličiny X značíme symbolem $\hat{X}$.

Příklad 1

Která hodnota znaku je modem veličiny X s následujícím rozložením četností?

x_i	výborně	velmi dobře	dobře	dostatečně	nedostatečně	$\sum$
n_i	7	8	20	15	10	60

Modus

Modus

Modus veličiny X je hodnota znaku s nejvyšší četností, tj. nejčastější hodnota znaku. Modus veličiny X značíme symbolem $\hat{X}$.

Příklad 1

Která hodnota znaku je modem veličiny X s následujícím rozložením četností?

x_i	výborně	velmi dobře	dobře	dostatečně	nedostatečně	$\sum$
n_i	7	8	20	15	10	60

$\hat{X} =$ „dobře“,
Interpretace: nejčastější hodnotou je hodnocení „dobře“.

Modus

Modus

Modus veličiny X je hodnota znaku s nejvyšší četností, tj. nejčastější hodnota znaku. Modus veličiny X značíme symbolem $\hat{X}$.

Příklad 1

Která hodnota znaku je modem veličiny X s následujícím rozložením četností?

x_i	výborně	velmi dobře	dobře	dostatečně	nedostatečně	$\sum$
n_i	7	8	20	15	10	60

$\hat{X}$ = „dobře",
Interpretace: nejčastější hodnotou je hodnocení „dobře".

Příklad 2

Která hodnota znaku je modem veličiny X s následujícím rozložením četností?

x_i	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
p_i	0.01	0.11	0.17	0.41	0.16	0.12	0.02	1

Modus

Modus

Modus veličiny X je hodnota znaku s nejvyšší četností, tj. nejčastější hodnota znaku. Modus veličiny X značíme symbolem $\hat{X}$.

Příklad 1

Která hodnota znaku je modem veličiny X s následujícím rozložením četností?

x_i	výborně	velmi dobře	dobře	dostatečně	nedostatečně	$\sum$
n_i	7	8	20	15	10	60

$\hat{X} =$ „dobře“,
Interpretace: nejčastější hodnotou je hodnocení „dobře“.

Příklad 2

Která hodnota znaku je modem veličiny X s následujícím rozložením četností?

x_i	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
p_i	0.01	0.11	0.17	0.41	0.16	0.12	0.02	1

$\hat{X} = 7$,
Interpretace: nejčastější hodnotou je číslo 7.

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?
4. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?
4. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
5. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 2?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?
4. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
5. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 2?
6. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?
4. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
5. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 2?
6. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3?
7. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 3,5?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?
4. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
5. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 2?
6. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3?
7. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 3,5?
8. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?
4. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
5. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 2?
6. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3?
7. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 3,5?
8. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
9. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 2.78?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?
4. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
5. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 2?
6. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3?
7. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 3,5?
8. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
9. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 2.78?
10. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše -2.1?

Distribuční funkce

Ilustrační příklad

Je dána veličina X s následujícím rozložením četností.

x_i	n_i	n_i^*	p_i	p_i^*
0	7	7	0.14	0.14
1	8	15	0.16	0.30
2	15	30	0.30	0.60
3	12	42	0.24	0.84
4	8	50	0.16	1
celkem	50	#	1	#

Řešme následující úlohy:

1. Jaký je počet pozorování s hodnotou 2?
2. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3?
3. Jaký je počet pozorování s hodnotou 3,5?
4. Jaký je počet pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
5. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 2?
6. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3?
7. Jaký je podíl pozorování s hodnotou 3,5?
8. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 3,5?
9. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 2.78?
10. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše -2.1?
11. Jaký je podíl pozorování s hodnotou nejvýše 7?

Distribuční funkce

Distribuční funkce

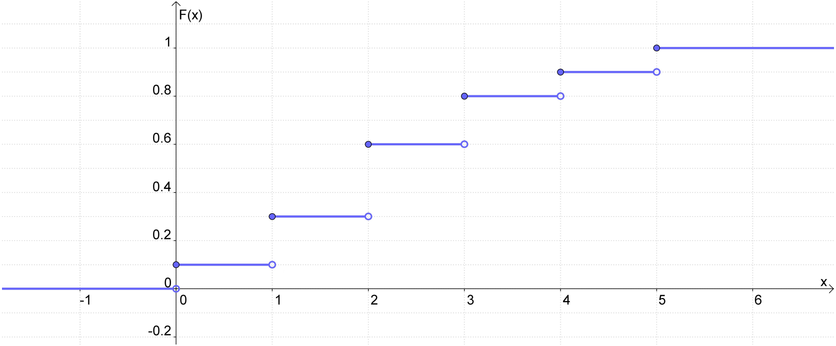
Distribuční funkce je funkce, která hodnotám x přiřazuje hodnotu podílu pozorování s hodnotou nejvýše x. Označujeme ji symbolem $F(x)$.

Distribuční funkce

Distribuční funkce

Distribuční funkce je funkce, která hodnotám x přiřazuje hodnotu podílu pozorování s hodnotou nejvýše x. Označujeme ji symbolem $F(x)$.

- souvislost s kumulovanou relativní četností, ale vyjádřená pro „spojité“ hodnoty x v rozmezí od $-\infty$ do $+\infty$
- výška skoku v grafu distribuční funkce odpovídá prosté relativní četnosti
- lze vyjádřit pouze pro kvantitativní veličiny



Distribuční funkce

Příklad 3

Určete předpis $F(x)$ veličiny X s následujícím rozložením četností.

x_i	0	1	2	3	4	$\sum$
n_i	7	8	15	12	8	50
p_i	0.14	0.16	0.30	0.24	0.16	1
p_i^*	0.14	0.30	0.60	0.84	1.00	#

Distribuční funkce

Příklad 3

Určete předpis $F(x)$ veličiny X s následujícím rozložením četností.

x_i	0	1	2	3	4	$\sum$
n_i	7	8	15	12	8	50
p_i	0.14	0.16	0.30	0.24	0.16	1
p_i^*	0.14	0.30	0.60	0.84	1.00	#

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 && \dots && x < 0 && F(-5) = 0 \\
&= 0.14 && \dots && 0 \leq x < 1 && \\
&= 0.30 && \dots && 1 \leq x < 2 && F(1) = 0.3 \\
&= 0.60 && \dots && 2 \leq x < 3 && F(2.5) = 0.6 \\
&= 0.84 && \dots && 3 \leq x < 4 && \\
&= 1 && \dots && 4 \leq x && F(12) = 1
\end{aligned}
$$

Příklad 4

Zapište předpis a namalujte graf $F(x)$ veličiny X s následujícím rozložením četností.

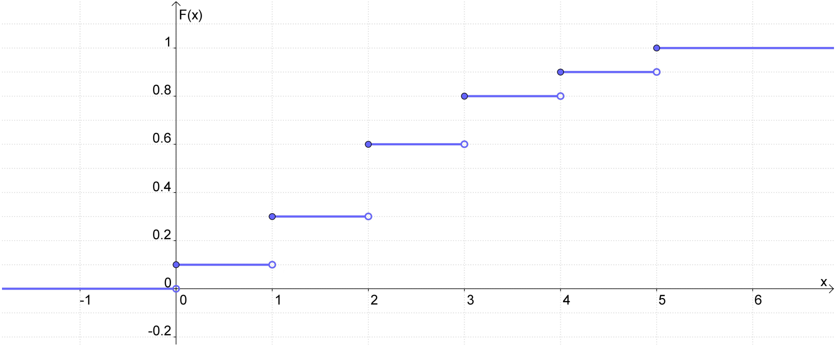
x_i	4	5	6	7	8	$\sum$
n_i	3	4	2	5	6	20

Kvantily

Příklad 5

Na obrázku je graf distribuční funkce.

- Nalezněte hodnoty $F(-1)$, $F(1)$, $F(3.5)$, $F(6)$.
- Vypočtěte relativní četnost hodnoty znaku $x = 3$.
- Zjistěte, pro jakou hodnotu x bude $F(x) = 0.6$ a interpretujte danou hodnotu.



Kvantily

Kvantil

$p\%$ kvantil je hodnota znaku, která tvoří hranici mezi $100 \cdot p\%$ hodnot, které jsou nejvýše rovny danému kvantilu a $100(1-p)\%$ hodnot které mají hodnotu rovnu nejméně tomuto kvantilu. Kvantily počítáme pouze pro kvantitativní (číselné) veličiny. Značíme je $\tilde{x}_{100p}$, kde p může nabývat hodnoty pouze v rozmezí $0 \leq p \leq 1$.

Kvantily

Kvantil

$p\%$ kvantil je hodnota znaku, která tvoří hranici mezi $100 \cdot p\%$ hodnot, které jsou nejvýše rovny danému kvantilu a $100(1-p)\%$ hodnot které mají hodnotu rovnu nejméně tomuto kvantilu. Kvantily počítáme pouze pro kvantitativní (číselné) veličiny. Značíme je $\tilde{x}_{100p}$, kde p může nabývat hodnoty pouze v rozmezí $0 \leq p \leq 1$.

Např. symbol $\tilde{x}_{60}$ čteme 60% kvantil a znamená číslo (hranici, hodnotu), pro kterou je 60% ze všech hodnot rovno nejvýše číslu $\tilde{x}_{60}$ a zbývajících 40% ze všech hodnot je rovno nejméně číslu $\tilde{x}_{60}$.

Kvantily

Kvantil

$p\%$ kvantil je hodnota znaku, která tvoří hranici mezi $100 \cdot p\%$ hodnot, které jsou nejvýše rovny danému kvantilu a $100(1-p)\%$ hodnot které mají hodnotu rovnu nejméně tomuto kvantilu. Kvantily počítáme pouze pro kvantitativní (číselné) veličiny. Značíme je $\tilde{x}_{100p}$, kde p může nabývat hodnoty pouze v rozmezí $0 \leq p \leq 1$.

Např. symbol $\tilde{x}_{60}$ čteme 60% kvantil a znamená číslo (hranici, hodnotu), pro kterou je 60% ze všech hodnot rovno nejvýše číslu $\tilde{x}_{60}$ a zbývajících 40% ze všech hodnot je rovno nejméně číslu $\tilde{x}_{60}$.

Významné kvantily

K popisu rozložení dat v souboru často vyjadřujeme některé významné kvantily:

- **dolní kvartil $\tilde{x}_{25}$** 25% kvantil, hranice mezi čtvrtinou nejnižších hodnot a zbylými vyššími hodnotami
- **medián $\tilde{x}$** 50% kvantil, odděluje polovinu dat s nižší hodnotou od poloviny dat s vyšší hodnotou
- **horní kvartil $\tilde{x}_{75}$** 75% kvantil, hranice mezi třemi čtvrtinami nejnižších hodnot a zbylou čtvrtinou vyšších hodnot

Kvantily

A 18

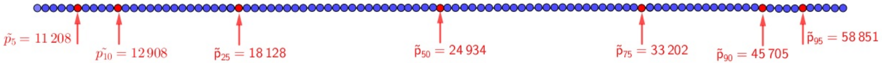
Distribuce hrubých měsíčních mezd zaměstnanců podle vzdělání

Distribution of gross monthly earnings of employees by educational attainment

ROK/*YEAR* 2016

VZDĚLÁNÍ ZAMĚSTNANCE	Průměrná mzda *Average earnings*	Mzdy v důležitých kvantilech *Earnings (CZK) in main quantiles*							*EDUCATIONAL ATTAINMENT OF EMPLOYEES*
		P5 5.percentil *5th percentile*	P10 1.decil *1st decile*	P25 1.kvartil *1st quartile*	P50 Medián *Median*	P75 3.kvartil *3rd quartile*	P90 9. decil *9th decile*	P95 95.percentil *95th percentile*	
CELKEM	29 061	11 208	12 908	18 128	**24 934**	33 202	45 705	58 851	*TOTAL*
základní a nedokončené	19 452	10 313	11 109	13 516	**18 174**	23 599	29 147	33 278	*Primary and incomplete education*
střední bez maturity	22 325	10 806	11 930	15 535	**21 054**	27 146	33 844	38 579	*Secondary education without A-level examination*
střední s maturitou	28 438	11 635	14 044	19 387	**25 696**	33 396	43 281	52 263	*Secondary education with A-level examination*
vyšší odborné a bakalářské	32 992	14 486	17 857	22 808	**28 980**	37 513	49 839	61 683	*Post-secondary non-tertiary and bachelor´s education*
vysokoškolské	45 906	14 878	20 188	27 348	**35 563**	51 860	78 349	104 465	*Higher education*
neuvedeno	26 631	10 973	12 089	16 848	**23 316**	30 262	41 787	53 753	*Not determined*

Zdroj: *Český statistický úřad* - https://www.czso.cz/csu/czso/struktura-mezd-zamestnancu-2016



Kvantily

Příklad 6

Měřením jsme zjistili hodnoty:
$6, 7, 8, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 7, 8, 6, 4, 3, 6, 5, 5, 3, 2, 4$

Nalezněte $\tilde{x}_{60}$.

Kvantily

Příklad 6

Měřením jsme zjistili hodnoty:
$6, 7, 8, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 7, 8, 6, 4, 3, 6, 5, 5, 3, 2, 4$

Nalezněte $\tilde{x}_{60}$.

Po uspořádání (od nejmenší hodnoty k nejvyšší)
$1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8$

Kvantily

Příklad 6

Měřením jsme zjistili hodnoty:
$6, 7, 8, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 7, 8, 6, 4, 3, 6, 5, 5, 3, 2, 4$

Nalezněte $\tilde{x}_{60}$.

Po uspořádání (od nejmenší hodnoty k nejvyšší)
$1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
n_i	1	3	4	2	3	3	2	2	20
p_i	0.05	0.15	0.20	0.1	0.15	0.15	0.1	0.1	1
p_i^*	0.05	0.20	0.40	0.5	0.65	0.80	0.90	1	#

Je $\tilde{y}_{60} = 5$, neboť p_i^* poprvé překročila hodnotu 0.60 u hodnoty znaku 5.

Kvantily

Příklad 6

Měřením jsme zjistili hodnoty:
$6, 7, 8, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 7, 8, 6, 4, 3, 6, 5, 5, 3, 2, 4$

Nalezněte $\tilde{x}_{60}$.

Po uspořádání (od nejmenší hodnoty k nejvyšší)
$1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
n_i	1	3	4	2	3	3	2	2	20
p_i	0.05	0.15	0.20	0.1	0.15	0.15	0.1	0.1	1
p_i^*	0.05	0.20	0.40	0.5	0.65	0.80	0.90	1	#

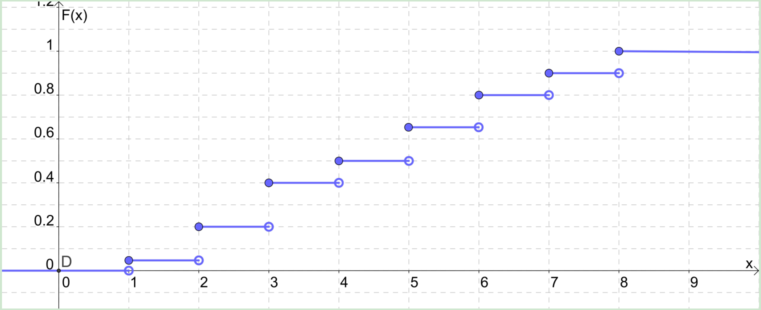
Je $\tilde{y}_{60} = 5$, neboť p_i^* poprvé překročila hodnotu 0.60 u hodnoty znaku 5.

Interpretace:
V daném souboru má 60 % údajů hodnotu nejvýše 5 a 40 % údajů hodnotu nejméně 5.

Kvantily

Příklad 6 (pokračování) - výpočet kvantilu pomocí $F(x)$

Je $1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8$



Je $\tilde{y}_{60} = 5$, neboť $F(x)$ poprvé překročila hodnotu 0.60 pro $x = 5$.

Kvantily

Označme počet hodnot n, hledaný kvantil p. Nechť jsou všechna data seřazena od nejmenší hodnoty k největší. Potom pořadí z prvku, který je hledaným kvantilem, je celočíselným řešením soustavy nerovnic

$$n \cdot p < z < n \cdot p + 1.$$

Příklad 7 - výpočet kvantilu pomocí vzorce

Vypočtěte 53% kvantil z hodnot $1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8$
Vypočteme pořadí prvku, který je 53% kvantilem. Je

$$20 \cdot 0.53 < z < 20 \cdot 0.53 + 1$$

$$10.6 < z < 11.6$$

$$z = 11$$

Hledaný 53% kvantil je 11. prvek v uspořádané řadě hodnot, je tedy $\tilde{x}_{53} = 5$.

Příklad 7 (pokračování) - výpočet kvantilu pomocí vzorce

Vypočtěte 50% kvantil z hodnot $1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8$
Je

$$\begin{aligned} 20 \cdot 0.5 < & z < 20 \cdot 0.5 + 1 \\ 10 < & z < 11 \qquad \ldots \text{ soustava nemá celočíselné řešení} \end{aligned}$$

V takovém případě volíme aritmetický průměr z 10. a 11. hodnoty. Je $x_{10} = 4$, $x_{11} = 5$. Potom $\tilde{x}_{50} = 4,5$.

Příklad 8

Vypočtěte $30\,\%$ kvantil, $47\,\%$ kvantil a medián pro veličinu, jejíž hodnoty s příslušnými četnostmi jsou uvedeny v tabulce:

x_i	2	5	6	7	9	11	13	$\sum$
n_i	2	2	3	1	2	8	2	20
p_i	0,1	0,1	0,15	0,05	0,1	0,4	0,1	1
p_i^*	0,1	0,2	0,35	0,4	0,5	0,9	1	$*$

Kvantily

Příklad 8

Vypočtěte $30\,\%$ kvantil, $47\,\%$ kvantil a medián pro veličinu, jejíž hodnoty s příslušnými četnostmi jsou uvedeny v tabulce:

x_i	2	5	6	7	9	11	13	$\sum$
n_i	2	2	3	1	2	8	2	20
p_i	0,1	0,1	0,15	0,05	0,1	0,4	0,1	1
p_i^*	0,1	0,2	0,35	0,4	0,5	0,9	1	$*$

30% kvantil

Pro $\tilde{x}_{30}$ je $n = 20$ a $p = 0.3$.

$$20 \cdot 0.3 < z < 20 \cdot 0.3 + 1$$

$$6 < z < 7$$

$$\tilde{x}_{30} = \frac{6+6}{2} = 6$$

Kvantily

Příklad 8

Vypočtěte $30\,\%$ kvantil, $47\,\%$ kvantil a medián pro veličinu, jejíž hodnoty s příslušnými četnostmi jsou uvedeny v tabulce:

x_i	2	5	6	7	9	11	13	$\sum$
n_i	2	2	3	1	2	8	2	20
p_i	0,1	0,1	0,15	0,05	0,1	0,4	0,1	1
p_i^*	0,1	0,2	0,35	0,4	0,5	0,9	1	$*$

30% kvantil

Pro $\tilde{x}_{30}$ je $n = 20$ a $p = 0.3$.

$$20 \cdot 0.3 < z < 20 \cdot 0.3 + 1$$

$$6 < z < 7$$

$$\tilde{x}_{30} = \frac{6+6}{2} = 6$$

47% kvantil

Pro $\tilde{x}_{47}$ je $n = 20$ a $p = 0.47$.

$$20 \cdot 0.47 < z < 20 \cdot 0.47 + 1$$

$$9.4 < z < 10.4$$

$z = 10,$ a proto $\tilde{x}_{47} = 9$

Kvantily

Příklad 8

Vypočtěte $30\,\%$ kvantil, $47\,\%$ kvantil a medián pro veličinu, jejíž hodnoty s příslušnými četnostmi jsou uvedeny v tabulce:

x_i	2	5	6	7	9	11	13	$\sum$
n_i	2	2	3	1	2	8	2	20
p_i	0,1	0,1	0,15	0,05	0,1	0,4	0,1	1
p_i^*	0,1	0,2	0,35	0,4	0,5	0,9	1	$*$

30% kvantil

Pro $\tilde{x}_{30}$ je $n = 20$ a $p = 0.3$.

$$20 \cdot 0.3 < z < 20 \cdot 0.3 + 1$$

$$6 < z < 7$$

$$\tilde{x}_{30} = \frac{6+6}{2} = 6$$

47% kvantil

Pro $\tilde{x}_{47}$ je $n = 20$ a $p = 0.47$.

$$20 \cdot 0.47 < z < 20 \cdot 0.47 + 1$$

$$9.4 < z < 10.4$$

$z = 10,$ a proto $\tilde{x}_{47} = 9$

50% kvantil - medián

Pro $\tilde{x}$ je $n = 20$ a $p = 0.5$

$$20 \cdot 0.5 < z < 20 \cdot 0.5 + 1$$

$$10 < z < 11$$

$$\tilde{x} = \frac{9+11}{2} = 10$$

Kvantily

Příklad 9

Vypočtěte a interpretujte dolní a horní kvartil a medián pro veličinu, jejíž hodnoty s příslušnými četnostmi jsou uvedeny v tabulce:

x_i	100	110	120	130	140	150	160
n_i	2	5	9	9	13	8	4

Příklad 10

Vypočtěte a interpretujte dolní a horní kvartil a medián pro veličinu, jejíž hodnoty s příslušnými četnostmi jsou uvedeny v tabulce:

x_i	100	110	120	130	140	150	160
p_i	0.05	0.10	0.11	0.30	0.19	0.15	0.10

Kvantily - intervalové rozdělení četností

Kvantily - intervalové rozdělení četností

U intervalového rozdělení četností lze k výpočtu kvantilu použít vzorec

$$\tilde{x}_p = \frac{z_p - n_1}{n_2} h_p + a_p,$$

kde

- $z_p = n \cdot p + 0,5$ je pořadové číslo jednotky, jejíž hodnota bude hledaný kvantil,
- n je rozsah souboru,
- n_1 je kumulativní četnost jednotek ležících před kvantilovým intervalem,
- n_2 je četnost intervalu, v němž leží hledaný kvantil,
- h_p je délka kvantilového intervalu,
- a_p je hodnota, která tvoří dolní hranici kvantilového intervalu.

Kvantily - intervalové rozdělení četností

Příklad 11

Vypočtěte všechny kvartily pro veličinu s intervalovým rozdělením četností:

interval měsíčních příjmů	počet pracovníků	kumulované součty
– 12 000	8	8
12 000 – 13 000	11	19
13 000 – 14 000	16	35
14 000 – 15 000	21	56
15 000 – 16 000	25	81
16 000 – 17 000	22	103
17 000 – 18 000	19	122
18 000 – 19 000	18	140
19 000 – 20 000	7	147
20 000 – a více	3	150

Kvantily - intervalové rozdělení četností

Příklad 11

Vypočtěte všechny kvartily pro veličinu s intervalovým rozdělením četností:

interval měsíčních příjmů	počet pracovníků	kumulované součty
– 12 000	8	8
12 000 – 13 000	11	19
13 000 – 14 000	16	35
14 000 – 15 000	21	56
15 000 – 16 000	25	81
16 000 – 17 000	22	103
17 000 – 18 000	19	122
18 000 – 19 000	18	140
19 000 – 20 000	7	147
20 000 – a více	3	150

Je $z_{25} = 150 \cdot 0.25 + 0.5 = 38$. Dolní kvartil proto leží v intervalu, který obsahuje prvek s pořadovým číslem 38. Dolní kvartil leží v intervalu 14 000 – 15 000 Kč. Dosazením do vzorce dostaneme

$$\tilde{x}_{25} = \frac{38 - 35}{21} \cdot 1\,000 + 14\,000 \doteq 14\,143.$$

Kvantily - intervalové rozdělení četností

Příklad 11

Vypočtěte všechny kvartily pro veličinu s intervalovým rozdělením četností:

interval měsíčních příjmů	počet pracovníků	kumulované součty
– 12 000	8	8
12 000 – 13 000	11	19
13 000 – 14 000	16	35
14 000 – 15 000	21	56
15 000 – 16 000	25	81
16 000 – 17 000	22	103
17 000 – 18 000	19	122
18 000 – 19 000	18	140
19 000 – 20 000	7	147
20 000 – a více	3	150

Je $z_{25} = 150 \cdot 0.25 + 0.5 = 38$. Dolní kvartil proto leží v intervalu, který obsahuje prvek s pořadovým číslem 38. Dolní kvartil leží v intervalu 14 000 – 15 000 Kč. Dosazením do vzorce dostaneme

$$\tilde{x}_{25} = \frac{38 - 35}{21} \cdot 1\,000 + 14\,000 \doteq 14\,143.$$

Dopočítejte zbývající kvartily.