

0.1 Úvod do lineární algebry

0.1.1 Vektory

Definice 0.1.1. Vektorem (aritmetického prostoru $\mathbb{R}^n$) budeme rozumět uspořádanou n -tici reálných čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definice 0.1.2. Definice sčítání vektorů

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \oplus (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

Příklad 0.1. $(2, 3, -4) + (1, -4, 5) = (2 + 1, 3 + (-4), -4 + 5) = (3, -1, 1)$

Definice 0.1.3. Definice násobení vektoru reálným číslem α

$$\alpha \otimes (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots, \alpha \cdot a_n)$$

Příklad 0.2. $5 \cdot (10, -3, 2, 7) = (5 \cdot 10, 5 \cdot (-3), 5 \cdot 2, 5 \cdot 7) = (50, -15, 10, 35)$

Příklad 0.3. Jsou dány vektory $V_1 = (2, 3, 5)$ a $V_2 = (-1, 2, 1)$. Vypočtěte souřadnice vektoru U , pro který platí: $U = 2V_1 + 3V_2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} U &= 2V_1 + 3V_2 \\ &= 2(2, 3, 5) + 3(-1, 2, 1) \\ &= (4, 6, 10) + (-3, 6, 3) \\ &= (1, 12, 13) \end{aligned}$$

$$\text{Závěr: } (1, 12, 13) = 2(2, 3, 5) + 3(-1, 2, 1)$$

Příklad 0.4. Vypočtěte souřadnice vektoru U , pro který platí: $U = 3V_1 - 5V_2 + 2V_3$, kde $V_1 = (3, 4, 2)$, $V_2 = (2, 3, -1)$ a $V_3 = (5, -3, 1)$.

Shrnutí

$$\begin{aligned} (1, 12, 13) &= 2(2, 3, 5) + 3(-1, 2, 1) \\ (9, -9, 13) &= 3(3, 4, 2) - 5(2, 3, -1) + 2(5, -3, 1) \end{aligned}$$

Definice 0.1.4. Řekneme, že vektor U je **lineární kombinací** skupiny vektorů $V_1, V_2, \dots, V_n$, jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ taková, že

$$U = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n.$$

Příklad 0.5. Vektor $(1, 12, 13)$ je lineární kombinací vektorů $(2, 3, 5)$ a $(-1, 2, 1)$.

Vektor $(9, -9, 13)$ je lineární kombinací vektorů $(3, 4, 2)$, $(2, 3, -1)$ a $(5, -3, 1)$.

Příklad 0.6. Zjistěte, zda vektor $U = (-2; 5; 0)$ je lineární kombinací vektorů $V_1 = (2; 1; 3)$ a $V_2 = (-2; 1; -2)$.

Řešení: Je-li vektor U lineární kombinací vektorů V_1 a V_2 , potom existují koeficienty α a β , které vyhovují rovnici $U = \alpha \cdot V_1 + \beta \cdot V_2$.

$$\begin{aligned} (-2; 5; 0) &= \alpha(2; 1; 3) + \beta(-2; 1; -2) \\ &= (2\alpha; \alpha; 3\alpha) + (-2\beta; \beta; -2\beta) \\ &= (2\alpha - 2\beta; \alpha + \beta; 3\alpha - 2\beta) \end{aligned}$$

$$-2 = 2\alpha - 2\beta \quad 5 = \alpha + \beta \quad 0 = 3\alpha - 2\beta \quad \alpha = 2 \quad \beta = 3$$

Závěr: Vektor U je lineární kombinací vektorů V_1 a V_2 .

Definice 0.1.5. Skupinu vektorů $V_1, V_2, \dots, V_n$, ve které žádný vektor není lineární kombinací zbývajících vektorů, nazýváme **lineárně nezávislá** skupina vektorů, resp. o těchto vektorech řekneme, že jsou **lineárně nezávislé**.

Vektor $(1, 12, 13)$ je lineární kombinací vektorů $(2, 3, 5)$ a $(-1, 2, 1)$.

Vektory $(1, 12, 13)$, $(2, 3, 5)$ a $(-1, 2, 1)$ nejsou lineárně nezávislé.

Vektor $(9, -9, 13)$ je lineární kombinací vektorů $(3, 4, 2)$, $(2, 3, -1)$ a $(5, -3, 1)$.

Vektory $(9, -9, 13)$, $(3, 4, 2)$, $(2, 3, -1)$ a $(5, -3, 1)$ nejsou lineárně nezávislé.

Definice 0.1.6. Skupinu vektorů $V_1, V_2, \dots, V_n$, ve které žádný vektor není lineární kombinací zbývajících vektorů, nazýváme lineárně nezávislá skupina vektorů.

$$V_1 = (1, 0, 0), \quad V_2 = (0, 1, 0), \quad V_3 = (0, 0, 1)$$

$$(1, 0, 0) = \alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) = (0, \alpha, 0) + (0, 0, \beta) = (0, \alpha, \beta)$$

$$(0, 1, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1) = (\alpha, 0, 0) + (0, 0, \beta) = (\alpha, 0, \beta)$$

$$(0, 0, 1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) = (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) = (\alpha, \beta, 0)$$

Skupina není lineárně závislá, resp. je lineárně nezávislá.

O geometrickém významu lineární (ne)závislosti vektorů viz <https://www.geogebra.org/m/NQFPMNnN>.

0.2 Matice

Definice 0.2.1. Maticí typu (m, n) nazýváme schéma $m \times n$ reálných čísel

$$A = (a_{mn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Příklad 0.7.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -3 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 11 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Definice 0.2.2. Jednotlivá čísla v matici nazýváme **prvky matice**. Každý prvek matice má své „souřadnice“, které pomáhají jednoznačně určit polohu prvku v matici.

Příklad 0.8. V dané matici nalezněte prvky a_{23} , a_{31} , a_{42} .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Řešení: $a_{23} = 2$, $a_{31} = 6$, prvek a_{42} v dané matici neexistuje

Definice 0.2.3. Jednotlivé řádky, resp. sloupce v matici můžeme chápat jako tzv. **řádkové**, resp. **sloupcové vektory**. Např. v matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

lze druhý řádek chápat jako vektor $\mathbf{r}_2 = (1, 4, 2)$; třetí sloupec jako vektor

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Definice 0.2.4. Matici typu $n \times n$, tj. matici, která má stejný počet řádků jako sloupců, nazýváme **čtvercová matice**.

Příklady čtvercových matic:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 3 & 9 \\ 1 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Definice 0.2.5. Matici typu $n \times m$, kde $n \neq m$, tj. matici, která má jiný počet řádků než sloupců, nazýváme **obdélníková matice**.

Příklady obdélníkových matic:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Definice 0.2.6. Prvky matice ve tvaru a_{ii} nazýváme **diagonální prvky**. Všechny diagonální prvky matice vytvářejí tzv. **diagonálu**.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 9 \\ 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Červeně označené prvky v matici představují příslušné diagonální prvky.

Definice 0.2.7. Čtvercovou matici, ve které jsou všechny prvky pod diagonálou rovny nule, nazýváme **horní trojúhelníková matice**.

Obdélníkovou matici, ve které jsou všechny prvky pod diagonálou rovny nule, nazýváme **horní lichoběžníková matice**.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Definice 0.2.8. Čtvercovou matici, ve které jsou všechny diagonální prvky rovny jedné, a všechny zbývající prvky jsou rovny nule, nazýváme **jednotková matice**.

Matici, ve které jsou všechny prvky rovny nule, nazýváme **nulová matice**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definice 0.2.9. Řekneme, že dvě matice A a B jsou si rovny, jestliže jsou stejného typu (stejný počet řádků a sloupců) a pro všechny indexy i a j platí rovnost $a_{ij} = b_{ij}$, tj. $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $\dots$, $a_{mn} = b_{mn}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice 0.2.10. Hodnost matice je číslo, které udává počet lineárně nezávislých řádkových vektorů v matici.

Příklad 0.9.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 3$$

Dvě matice se nazývají ekvivalentní, jestliže mají stejný počet sloupců a stejnou hodnost. Úpravy, které převádějí matici v matici s ní ekvivalentní nazýváme **ekvivalentní úpravy**.

Následující operace patří mezi ekvivalentní úpravy:

1. Změna pořadí řádkových vektorů.
2. Vynásobení řádkového vektoru nenulovým číslem.
3. K libovolnému řádkovému vektoru přičteme lineární kombinaci zbývajících řádkových vektorů.
4. Jestliže je některý řádkový vektor lineární kombinací ostatních řádkových vektorů, potom jej vynecháme.
5. Připojení dalšího řádkového vektoru, který je lineární kombinací řádkových vektorů matice.
6. Záměna pořadí sloupcových vektorů.

Definice 0.2.11. Gaussův algoritmus výpočtu hodnosti matice

Matici převedeme pomocí ekvivalentních úprav na horní lichoběžníkovou matici. Hodnost (tj. počet řádků) této horní lichoběžníkové matice je rovna hodnosti původní matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 12 & 7 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gaussova metoda umožňuje rozhodnout o dané skupině vektorů v aritmetickém vektorovém prostoru, zda je či není lineárně závislá. Navíc převádí soustavu rovnic zapsanou v maticovém tvaru na jinou soustavu, ovšem se shodným řešením.

Příklad 0.10. Určeme hodnost matice A , kde:

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 3, & -2, & 2, & 4 \\ 2, & 6, & 3, & 0, & -1 \\ -1, & 1, & 3, & 1, & 5 \\ -2, & 2, & 13, & -2, & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Použijeme Gaussův algoritmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 13 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

Příklad 0.11. Úprava matice Gaussovou eliminací

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

Příklad 0.12. Úprava matice Gaussovou eliminací

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow +}$$

Příklad 0.13. Úprava matice Gaussovou eliminací

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Získali jsme horní lichoběžníkovou matici, která má hodnotu 3. Proto je $h(A) = 3$.

0.3 Soustava lineárních rovnic

Definice 0.3.1. Soustava rovnic Soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &+ \vdots + \dots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde a_{ij} , b_i jsou reálná čísla a x_i neznámé, se nazývá **soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých**, stručně **soustava lineárních rovnic**.

Matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je tzv. **matice soustavy** a matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se nazývá **rozšířená matice soustavy**.

Definice 0.3.2. Řešení soustavy rovnic **Řešením soustavy** nazýváme každý aritmetický vektor

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

jehož složky u_i , dosazený za neznámé x_i , přemění soustavu m rovnic v soustavu m rovností.

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 = 5$$

$$\mathbf{u} = (5; 2; 3)$$

$$2 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + 3 = 5$$

$$\mathbf{u} = (2; 0; 1)$$

$$2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 1 = 5$$

Definice 0.3.3. Frobeniova věta Soustava lineárních rovnic má alespoň jedno řešení právě tehdy, když matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají tutéž hodnotu. Jestliže soustava lineárních rovnic o n neznámých má matici soustavy a rozšířenou matici soustavy téže hodnoty rovné číslu h , potom platí:

1. Jestliže $h = n$, soustava má právě jedno řešení.
2. Jestliže $h < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení. Přitom všechna řešení dostaneme tak, že jistých $n - h$ neznámých volíme (všemi možnými způsoby) a zbývajících h neznámých (jednoznačně) vypočítáme.

Definice 0.3.4. Homogenní soustava lineárních rovnic Soustava lineárních rovnic, jejichž pravé strany jsou rovny nule, se nazývá **homogenní soustava lineárních rovnic**. Každou takovou soustavu můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + \dots + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou neznámé a prvky a_{ij} jsou příslušné koeficienty u j -té neznámé v i -tém řádku soustavy.

Předchozí soustava je pouze speciálním případem soustavy s nenulovou pravou stranou. Má však některé speciální zajímavé vlastnosti.

1. Soustava homogenních lineárních rovnic má vždy řešení.
2. Množina M všech řešení obecné soustavy lineárních rovnic (tj. soustavy rovnic s nenulovou pravou stranou) je rovna součtu $\mathbf{m} + V$ libovolného (tzv. partikulárního) řešení $\mathbf{m}$ obecné soustavy s vektorovým prostorem V všech řešení příslušné soustavy homogenních rovnic.

Vypočtete řešení soustavy lineárních rovnic:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3$$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$

Soustavu zapíšeme v maticovém tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

Při úpravě matice používáme následující úpravy k tomu, abychom ji převedli do tvaru horní lichoběžníkové matice:

- změna pořadí řádků matice
- vynásobení řádku matice nenulovým číslem

- přičtení nenulového násobku i -tého řádku k j -tému řádku
- vynechání řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků (zejména pokud obsahuje pouze nuly)

Tím soustavu rovnic převedeme na jinou, ekvivalentní, soustavu, která má ovšem stejné řešení jako původně zadaná soustava rovnic.

Podle Frobeniovy věty může mít soustava lineárních rovnic celkem tři různé počty řešení:

Definice 0.3.5. Soustava nemá řešení Toto nastane tehdy, jestliže se hodnota základní a rozšířené matice nerovnájí.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Uvědomte si, že poslední rovnice v soustavě má tvar

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1.$$

Soustava lineárních rovnic může mít celkem tři různé počty řešení:

Definice 0.3.6. Soustava má právě jedno řešení Hodnota základní a rozšířené matice rovnají a tato hodnota je rovna počtu neznámých.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Uvědomte si, že poslední rovnice v soustavě má tvar

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = -3,$$

resp.

$$x_4 = -3.$$

Nyní uvažujme třetí řádek v závěrečné matici: řádek $(0 \ 0 \ 2 \ 1 \ | \ -1)$ představuje rovnici

$$0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 = -1,$$

tedy rovnici

$$2x_3 + x_4 = -1.$$

Již víme, že hodnota neznámé x_4 je rovna číslu -3 . Rovnici upravíme do tvaru

$$2x_3 + (-3) = -1, \quad \text{resp.} \quad 2x_3 - 3 = -1.$$

Je tedy

$$2x_3 = 2, \quad \text{resp.} \quad x_3 = 1.$$

Nyní již víme, že $x_3 = 1$ a $x_4 = -3$.

Nyní uvažujme druhý řádek v závěrečné matici: řádek $(0 \ 1 \ -2 \ -1 \ | \ 3)$ představuje rovnici

$$0x_1 + 1x_2 + (-2)x_3 + (-1)x_4 = 3,$$

je tedy

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = 3.$$

Již víme, že $x_3 = 1$ a $x_4 = -3$. Tyto hodnoty dosadíme do předchozí rovnice a dostaneme

$$x_2 - 2 \cdot (1) - (-3) = 3, \quad \text{resp.} \quad x_2 + 1 = 3.$$

Je tedy $x_2 = 2$. Nyní již víme, že $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ a $x_4 = -3$.

Nakonec uvažujme první řádek v závěrečné matici: řádek $(1 \ 2 \ 3 \ 2 \ | \ 2)$ představuje rovnici

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2.$$

Víme, že $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ a $x_4 = -3$. Tyto hodnoty dosadíme do předchozí rovnice a dostaneme

$$x_1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 2, \quad \text{resp.} \quad x_1 + 1 = 2.$$

Je tedy $x_1 = 1$. Tím jsme získali hodnoty všech neznámých: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ a $x_4 = -3$. Toto řešení zapíšeme ve vektorovém tvaru:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, -3).$$

Definice 0.3.7. Soustava má nekonečně mnoho řešení. Hodnota základní a rozšířené matice se rovnají a tato hodnota je menší než počet neznámých.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Uvědomte si, že poslední rovnice v soustavě má tvar

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0.$$

Poslední rovnice

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0, \quad \text{resp.} \quad 0 = 0$$

nepřináší žádnou informaci, proto ji vůbec nebereme v úvahu.

Třetí řádek $(0 \ 0 \ 2 \ 1 \ | \ -1)$ v závěrečné matici představuje rovnici

$$0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 = -1,$$

tedy jednu rovnici s dvěma neznámými:

$$2x_3 + x_4 = -1.$$

Již víme, jak tyto rovnice řešit. Neznámou x_3 položíme rovnu parametru t a neznámou x_4 vyjádříme pomocí tohoto parametru. Je $x_3 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$ a platí

$$2t + x_4 = -1, \quad \text{tedy} \quad x_4 = -1 - 2t.$$

Nyní uvažujme druhý řádek v závěrečné matici: řádek $(0 \ 1 \ -2 \ -1 \ | \ 3)$ představuje rovnici

$$0x_1 + 1x_2 + (-2)x_3 + (-1)x_4 = 3,$$

je tedy

$$x_2 - 2x_3 - x_4 = 3.$$

Již víme, že $x_3 = t$ a $x_4 = -1 - 2t$. Tyto hodnoty dosadíme do předchozí rovnice a dostaneme

$$x_2 - 2t - (-1 - 2t) = 3, \quad \text{resp.} \quad x_2 + 1 = 3.$$

Je tedy $x_2 = 2$. Nyní již víme, že $x_2 = 2$, $x_3 = t$ a $x_4 = -1 - 2t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

První řádek $(1 \ 2 \ 3 \ 2 \ | \ 2)$ v závěrečné matici představuje rovnici

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2.$$

Víme, že $x_2 = 2$, $x_3 = t$ a $x_4 = -1 - 2t$. Tyto hodnoty dosadíme do předchozí rovnice a dostaneme

$$x_1 + 2 \cdot 2 + 3t + 2(-1 - 2t) = 2, \quad \text{resp.} \quad x_1 + 2 - t = 2.$$

Je tedy $x_1 = t$. Tím jsme získali hodnoty všech neznámých: $x_1 = t$, $x_2 = 2$, $x_3 = t$ a $x_4 = -1 - 2t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Toto řešení zapíšeme ve vektorovém tvaru:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, 2, t, -1 - 2t)_{t \in \mathbb{R}}.$$

Řešení soustavy lze zapsat i v jiném tvaru. Je:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (t, 2, t, -1 - 2t)_{t \in \mathbb{R}} \\ &= (0, 2, 0, -1) + (t, 0, t, -2t) \\ &= (0, 2, 0, -1) + t(1, 0, 1, -2),\end{aligned}$$

kde vektor $(0, 2, 0, -1)$ představuje partikulární řešení nehomogenní soustavy rovnic a množina $t(1, 0, 1, -2)$ je obecným řešením příslušné homogenní soustavy rovnic.

0.4 Operace s maticemi

Definice 0.4.1. Označení V následujícím textu bude symbol $M(m, n)$ značit množinu všech matic o rozměrech $m \times n$, tedy matici s m řádky a n sloupci. Symbol $M(2, 2)$ tedy např. značí množinu všech čtvercových matic s dvěma řádky a dvěma sloupci.

Příklad 0.14. Příklad

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M(2, 3)$$

Příklad 0.15. Příklad

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \in M(3, 2)$$

Definice 0.4.2. Sčítání matic Necht (a_{ij}) a (b_{ij}) jsou libovolné matice z množiny $M(m, n)$. Potom sčítání matic (a_{ij}) a (b_{ij}) je definováno vzorcem:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),$$

je tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Příklad 0.16. Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definice 0.4.3. Násobení matic reálným číslem Násobení matice libovolným číslem $\alpha \in \mathbb{R}$ je definováno takto

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}).$$

Příklad 0.17. Příklad

$$4 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 4 \\ 8 & 4 & -16 \end{pmatrix}.$$

Lze snadno ověřit, že množina $M(m, n)$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem tvoří vektorový prostor o dimenzi $m \cdot n$.

Definice 0.4.4. Skalární součin vektorů Necht u a v jsou dva vektory z aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, tedy

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad v = (v_1, \dots, v_n).$$

Skalární součin $u \cdot v$ vektorů u a v je roven

$$u \cdot v = (u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Příklad 0.18. Příklad

$$(1, 5, 4, -3) \cdot (2, 6, 3, 1) = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 41$$

Definice 0.4.5. Skalární součin vektorů Skalárně můžeme násobit i sloupcové vektory, nebo řádkový vektor se sloupcovým.

Příklad 0.19. Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 44$$

Příklad 0.20. Příklad

$$(1, 5, 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 44$$

Definice 0.4.6. Násobení matic Necht $(a_{ij}) \in M(p, q)$ a $(b_{ij}) \in M(q, r)$. Potom **součinem matic** (a_{ij}) a (b_{ij}) rozumíme matici $(c_{ij}) \in M(p, r)$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj},$$

tedy platí, že prvek c_{ij} je skalárním součinem i -tého řádku první matice a j -tého sloupce druhé matice.

Příklad 0.21. Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \\ 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 16 & 33 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Příklad 0.22. Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definice 0.4.7. Vlastnosti součinu matic I Dvě matice lze vynásobit, jestliže lze provést příslušné skalární součiny, tj. jestliže první matice má stejný počet sloupců jako druhá matice řádků. Pokud se tyto počty nerovnaj, matice nelze násobit.

Definice 0.4.8. Vlastnosti součinu matic II Násobíme-li dvě matice, potom výsledná matice má stejný počet řádků jako první matice a stejný počet sloupců jako druhá matice.

Příklad 0.23. Příklad - nekomutativita součinu matic

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 27 \\ 28 & 33 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 13 \\ 12 & 5 & 18 \\ 29 & 12 & 43 \end{pmatrix}.$$

Definice 0.4.9. Vlastnosti součinu matic III Násobení matic není obecně komutativní. Nestačí říci, které matice násobíme - musí se také určit, v jakém pořadí se mají vynásobit.

Příklad 0.24. Příklad - násobení jednotkovou maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Výše uvedený příklad ukazuje, že jednotková matice má charakter jednotkového prvku vzhledem k násobení matic, tedy $AJ = A$, resp. $JA = A$, kde J značí jednotkovou matici.

Právě uvedenou vlastnost $JA = AJ = A$ často využíváme při řešení maticových rovnic. Mějme matici

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Řekneme, že matice (b_{ij}) je **transponovaná matice** k matici (a_{ij}) (značíme $(b_{ij}) = (a_{ij})^T$), jestliže platí

$$(a_{ij})^T = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Příklad 0.25. Příklad Vypočtete transponovanou matici k matici A , kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Je

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jsou dány matice A , B , X , kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Rozepište maticovou rovnici $AX = B$.

Řešení: Nejprve nalezneme matici AX . Je zřejmé, že výsledná matice bude mít tři řádky a jeden sloupec.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 5z \\ 3x + 5y + 8z \\ 2x + 4y + 9z \end{pmatrix}$$

Nyní porovnáme matici AX s maticí B . Je

$$AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y + 5z \\ 3x + 5y + 8z \\ 2x + 4y + 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 5y + 8z = 5 \\ 2x + 4y + 9z = 8 \end{array}$$

Definice 0.4.10. Shrnutí Soustavu rovnic lze přepsat ve tvaru $AX = B$, kde A je matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je vektor (matice) neznámých a $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ je vektor (matice) hodnot pravých stran soustavy.

Definice 0.4.11. Inverzní matice Mějme čtvercovou matici A . Matici A^{-1} , pro kterou platí rovnost

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = J,$$

kde J je jednotková matice, nazýváme **inverzní maticí** k matici A .

Inverzní matice nám v jistých případech pomůže vypočítat řešení soustavy rovnic. Je

$$\begin{array}{ll} AX = B & \dots \text{soustava rovnic} \\ A^{-1}AX = A^{-1}B & \\ JX = A^{-1}B & \\ X = A^{-1}B & \dots \text{řešení soustavy rovnic} \end{array}$$

Definice 0.4.12. Výpočet inverzní matice pomocí eliminační metody Uvedeme způsob výpočtu inverzní matice pomocí eliminační metody. Za zadanou matici A doplníme příslušnou jednotkovou matici. Pomocí úprav neměnicích hodnot matice pak přepočítáváme matici tak, aby v první části matice vznikla jednotková matice. V druhé části matice se pak nachází inverzní matice A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Příklad 0.26. Příklad - výpočet inverzní matice Vypočtete inverzní matici k matici A , kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 6 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 4 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Příklad 0.27. Řešení soustavy rovnic pomocí inverzní matice Vypočtěte řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Při řešení použijeme výsledek předchozí úlohy:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 4 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Příklad 0.28. Řešení soustavy rovnic pomocí inverzní matice

$$\begin{aligned}
A &= \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 9 \\ 4 \end{array} \right) \\
X &= A^{-1}B = \left(\begin{array}{ccc} 4 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 7 \\ 9 \\ 4 \end{array} \right) \\
X &= \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 28 - 9 - 20 \\ -14 + 9 + 8 \\ -21 + 9 + 16 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

resp. $X = (x, y, z) = (-1, 3, 4)$.