Kapitola 3

Funkce více proměnných

V této kapitole navážeme na pojem funkce jedné proměnné. Naším cílem bude vybudovat si představu funkce více proměnných, uvědomit si vlastnosti těchto funkcí a umět vyšetřit extrémy těchto funkcí. Již víme, že k vyšetření extrémů funkce jedné proměnné nám dobře posloužila derivace funkce. Stejně to bude i případě funkcí více proměnných. Nicméně přechod od jedné proměnné k více proměnným bude trochu složitější. Naproti tomu ve vyšetřování extrémů funkce dvou proměnných a více než dvou proměnných nebude zásadní rozdíl, a proto se často omezíme jen na funkce dvou proměnných. Funkce jedné proměnné je vztah mezi závisle a nezávisle proměnnou. Tento vztah je vyjádřen většinou funkčním předpisem. Jistě se nám ale vybaví situace, kdy jeden důsledek má více příčin, kdy jedna veličina závisí na chování více veličin. Například víme, že cena je závislá na celkové produkci jistého výrobku. Pokud je na trhu více výrobců daného produktu, pak cena tohoto produktu bude závislá na produkci každého z výrobců. Nebo například z ekonomie víme, že celková produkce je závislá na výši kapitálu i množství vložené práce.

Připomeňme dále, že v této kapitole budeme pracovat s pojmy oblasti lineární algebry, se kterými jsme se seznámili v kapitolách o maticích, determinantech a kvadratických formách. Zcela zřejmě by čtenář před studiem této kapitoly měl být seznámen s diferenciálním počtem funkce jedné proměnné.

3.1 Základní pojmy funkce více proměnných

V dalším nejprve zavedeme korektně pojem funkce více proměnných a než přistoupíme k vyšetřování vlastností funkcí více proměnných, ukážeme si několik grafů pro lepší představu.

Funkce více proměnných, definiční obor, obor hodnot

Nechť množina $D \subset \mathbb{R}^n$ a zobrazení f, které každé n-tici z $D \in \mathbb{R}^n$ přiřadí právě jednu reálnou hodnotu, se nazývá **funkce více proměnných.** Množina D se nazývá **definiční obor** funkce f. Množinu všech hodnot $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ nazýváme **obor hodnot** funkce f.

Elementární funkce n proměnných

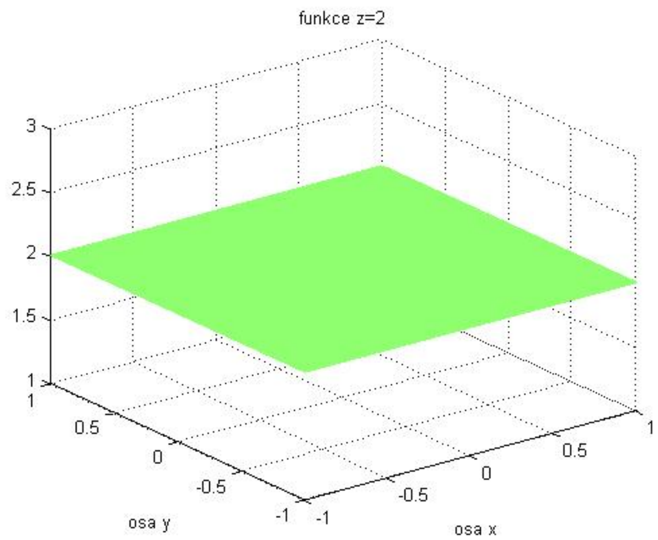
Jakákoli funkce n proměnných, která vznikne z elementárních funkcí jedné proměnné konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení, skládání a rozšiřování, se nazývá elementární funkce n proměnných.

V diferenciálním počtu funkce jedné proměnné jsme si zavedli pojmy limita a spojitost funkce. Tyto pojmy jsou u funkcí více proměnných definovány formálně stejně jako u funkcí jedné proměnné. My zde tyto definice nebudeme uvádět. U spojitosti funkce vystačíme s představou, že graf spojité funkce více proměnných v každém bodě definičního oboru nemá ”skoky”.

Spojitost elementární funkce n proměnných

Všechny elementární funkce n proměnných jsou spojité na svém definičním oboru.

U funkcí jedné proměnné jsme viděli, že při mnohém uvažování a řešení problémů nám napomohla představa o grafu funkce. S grafy funkcí více proměnných než dvě je problém. V našem trojrozměrném světě je nezobrazíme. Ale jistou představu si můžeme utvořit z grafů funkcí dvou proměnných $z = f(x, y)$. Nejjednodušší funkce jedné proměnné byla konstantní funkce. Jak vypadá graf konstantní funkce dvou proměnných s předpisem $f(x, y) = c$? Víme, že graf konstantní funkce jedné proměnné je přímka rovnoběžná s osou x. Na obrázku 3.1 vidíme graf konstantní funkce dvou proměnných $z = f(x, y) = 2$. Jedná se o rovinu rovnoběžnou s osami x a y ve vzdálenosti 2. Ať mají nezávisle proměnné x a y jakoukoli hodnotu, závisle proměnná z je stále rovna dvěma. Na obrázku 3.1 je graf této funkce zobrazen pouze pro $(x, y) \in \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$.

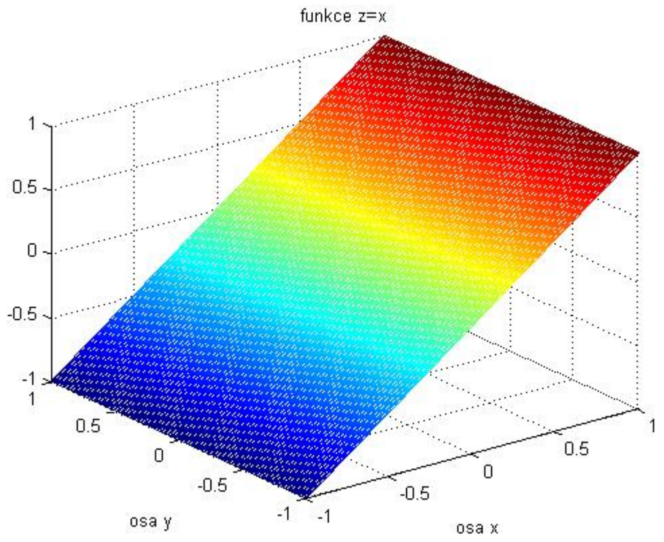


Obrázek 3.1: Konstantní funkce dvou proměnných

Soustřeďme se dále na funkci dvou proměnných s předpisem $f(x, y) = x$. Vidíme, že v předpisu se proměnná y vůbec nevyskytuje. Znamená to, že ať bude proměnná y nabývat jakékoli hodnoty, funkční hodnotu to neovlivní. Proměnná x se v předpisu funkce vyskytuje v první mocnině, závislost je tedy vzhledem k této proměnné lineární. Kdyby se jednalo o funkci jedné proměnné, grafem takové funkce by byla rostoucí přímka procházející počátkem souřadných os.

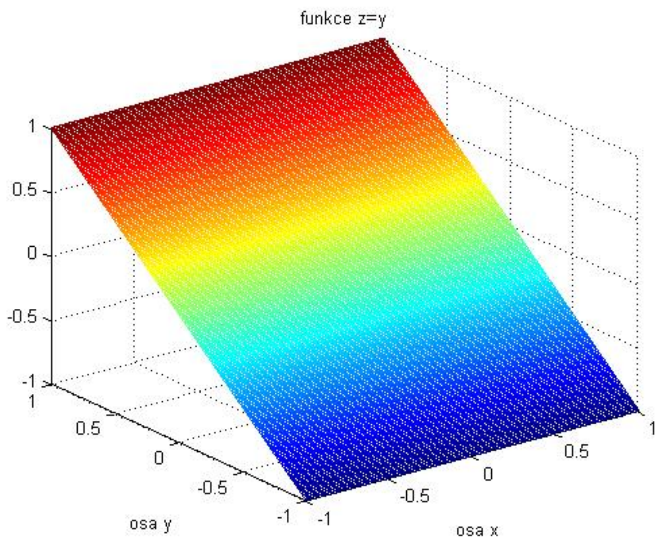
Pokud se jedná o funkci dvou proměnných, grafem bude taková plocha, která bude splňovat následující

- při jakékoli konktrétní hodnotě proměnné y se funkce chová jako lineární funkce $f(x) = x$,
- při jakékoli konktrétní hodnotě proměnné x se funkce chová jako konstanta.



Obrázek 3.2: Lineární funkce f(x,y)=x

Na grafu funkce se toto projeví následovně. Pokud bychom prořízli graf této funkce rovinou rovnoběžnou s osou x, řez bude mít tvar přímky (graf lineární funkce v $\mathbb{R}$). Kdežto pokud bychom prořízli graf této funkce rovinou rovnoběžnou s osou y, řez bude mít tvar přímky rovnoběžné s osou y (graf konstatntní funkce v $\mathbb{R}$). Graf této funkce vidíme na obrázku 3.2. Tento graf je opět zobrazen pro $(x, y) \in \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$. Funkce $f(x, y) = y$ je naopak lineární v proměnné y, kdežto proměnná x nebude funkční hodnoty této funkce nijak ovlivňovat. Z grafu 3.3 vidíme, že pro jakoukoli hodnotu proměnné x, má graf funkce tvar skloněné přímky. Naopak pro jakoukoli konkrétní hodnotu proměnné y je graf dané funkce přímka rovnoběžná s osou y, protože pro jakoukoli konkrétní hodnotu proměnné y je funkce konstantní. Například pro $y = 2$ platí $f(x, 2) = 2$.

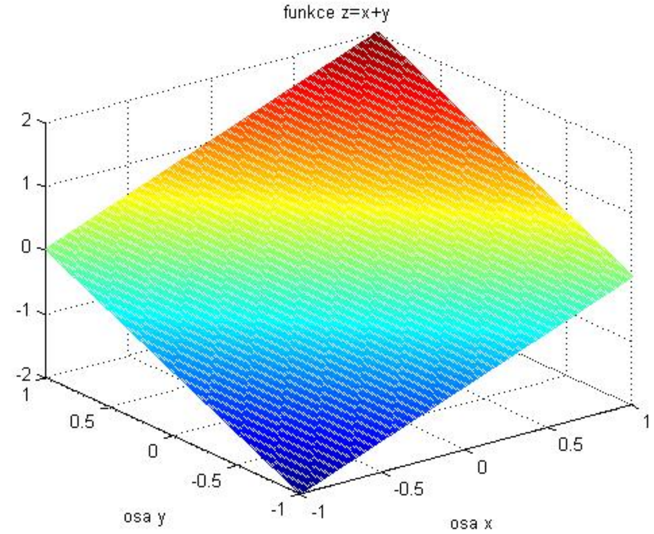


Obrázek 3.3: Funkce f(x,y)=y

Nyní již tušíme, že graf funkce $f(x, y) = x + y$ bude rovina, která bude splňovat

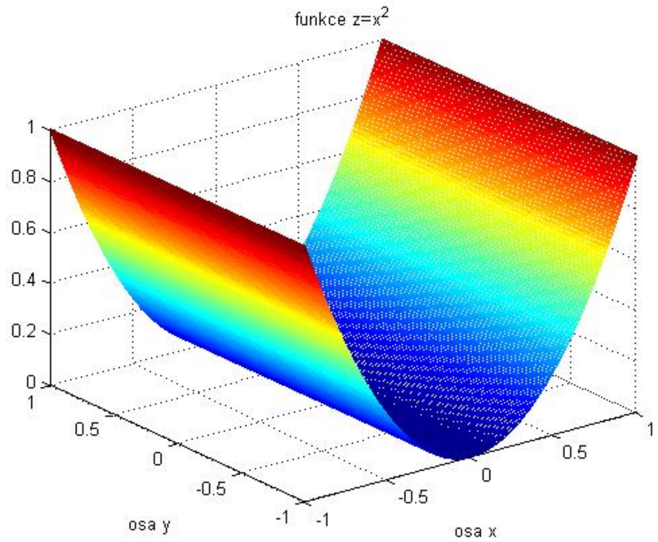
- pro jakoukoli hodnotu proměnné x ($x = c$, kde c je libovolná konstanta), bude daná funkce dvou proměnných lineární funkce jedné proměnné $f(c, y) = c + y$ a jejím grafem bude nakloněná přímka.

- pro jakoukoli hodnotu proměnné y $(y = c)$ bude daná funkce dvou proměnných lineární funkce jedné proměnné $f(x, c) = x + c$ a jejím grafem bude rostoucí přímka.

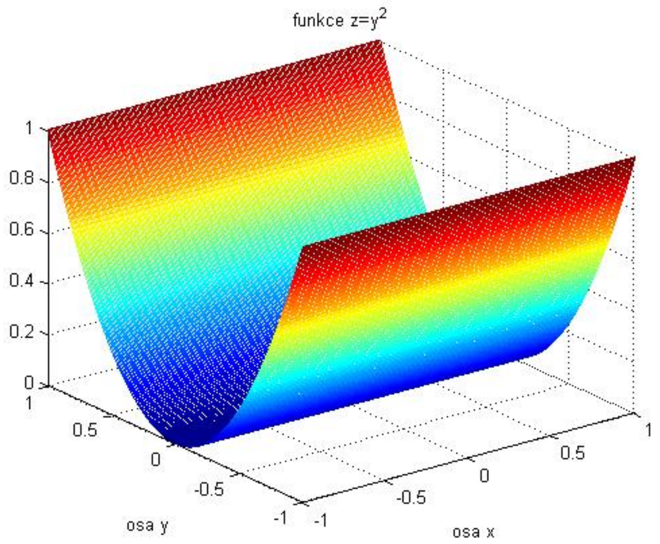


Obrázek 3.4: Lineární funkce f(x,y)=x+y

Graf funkce vidíme na obrázku 3.4. Dále se soustřeďme na funkce $f(x, y) = x^2$ a $f(x, y) = y^2$. Kdyby se jednalo o funkce pouze jedné proměnné, jejich grafem by byla parabola s vrcholem v počátku souřadných os. Obě funkce jsou ale funkce dvou proměnných. Pro funkci $f(x, y) = x^2$ platí, že hodnoty proměnné y funkční hodnoty neovlivní. Funkční hodnoty funkce $f(x, y) = x^2$ se v závislosti na proměnné x budou měnit s druhou mocninou. Tedy pro libovolnou konstantu c, pro kterou $x = c$, pak $f(c, y) = c^2$ je konstatntní funkce proměnné y a jejím grafem je přímka rovnoběžná s osou y.

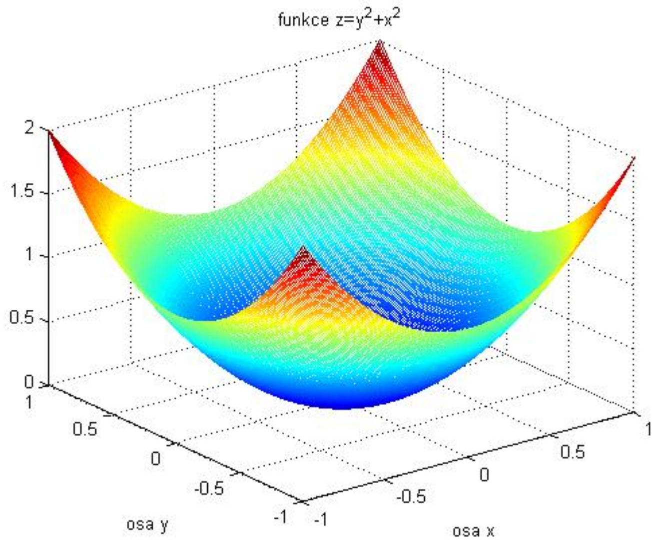


Obrázek 3.5: Kvadratická funkce $f(x, y) = x^2$



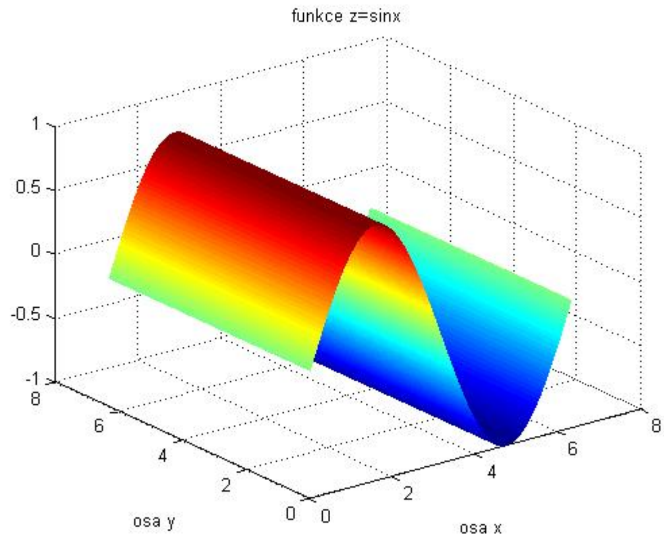
Obrázek 3.6: Kvadratická funkce $f(x, y) = y^2$

Pokud vezmeme pevně $y = c$, pak $f(x, c) = x^2$. Grafem této funkce je parabola pro každé c. Pro $f(x, y) = y^2$ platí všechny předešlé úvahy jen se záměnou proměnných. Grafy těchto funkcí pro $(x, y) \in \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$ jsou na obrázcích 3.5 a 3.6.

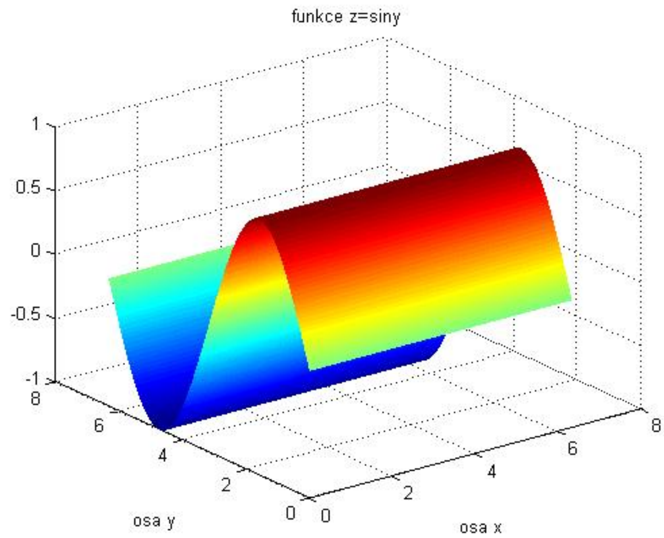


Obrázek 3.7: Kvadratická funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$

Graf funkce $f(x, y) = x^2+y^2$ bude plocha, kterou prořízneme-li rovinou rovnoběžnou s osou x, řez bude mít tvar paraboly. A stejně v případě proříznutí rovinou rovnoběžnou s osou y, řez bude mít tvar paraboly. Graf této funkce je na obrázku 3.7 pro $(x, y) \in \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$.

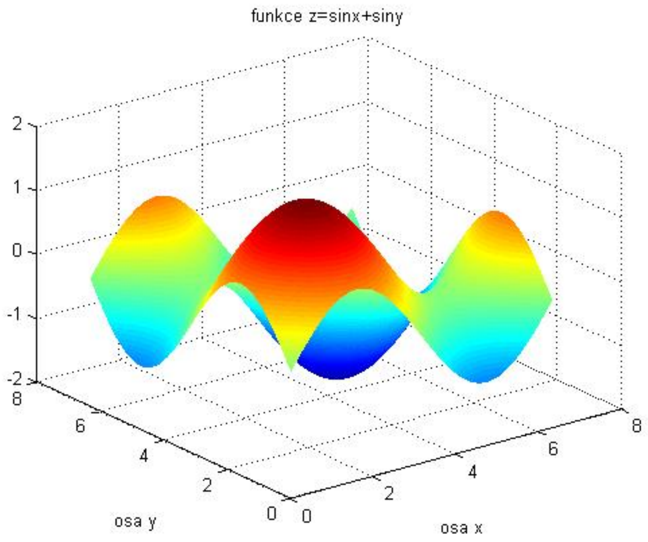


Obrázek 3.8: Funkce $f(x, y) = \sin x$



Obrázek 3.9: Funkce $f(x, y) = \sin y$

Nakonec se ještě podíváme na funkce $f_1(x, y) = \sin x$, $f_2(x, y) = \sin y$ a funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$. První dvě funkce mají ve svém předpisu vždy jen jednu proměnnou. Pokud tato proměnná bude nabývat hodnotu rovnou určité konstantě, pak se bude jednat o konstantní funkce. Totiž $f_1(c, y) = \sin c$ a $f_2(x, c) = \sin c$. Pokud prořízneme grafy těchto funkcí rovinou rovnoběžnou s osou y, resp. x, řez má podobu přímky rovnoběžné s osou y, resp. x. Pokud za druhou proměnnou do předpisu těchto dvou funkcí dosadíme libovolnou konstantu, dostaneme funkce $f_1(x, c) = \sin x$ a $f_2(c, y) = \sin y$. Tedy řezy rovnoběžné roviny s osou y, resp. x, budou sinové vlny. Graf funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$ bude mít v obou řezech rovinami rovnoběžnými s osami x a y tvary sinových vln. Grafy těchto funkcí pro $(x, y) \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$ jsou na obrázcích 3.8, 3.9 a 3.10.



Obrázek 3.10: Funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$

Na uvedených příkladech funkcí dvou proměnných jsme si uvědomili, že pokud jednu proměnnou zafixujeme (položíme rovnu konstantě), dostáváme funkci jedné proměnné. V případě, že proměnná y je rovna konstantě, funkce dvou proměnných se stane funkcí pouze proměnné x a graf této funkce bude průsečík grafu funkce dvou proměnných a roviny rovnoběžné s osou x a procházející bodem $y = konst.$ V případě, že proměnná x je rovna konstantě, funkce dvou proměnných se stane funkcí pouze proměnné y a graf této funkce bude průnik grafu funkce dvou proměnných a roviny rovnoběžné s osou y a procházející bodem $x = konst.$

Na závěr této podkapitoly uveďme ještě některé vlastnosti podmnožim prostoru $\mathbb{R}^n$.

Vlastnosti podmnožin v $\mathbb{R}^n$

Kruhové okolí bodu Množina všech bodů $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, které splňují $|X - C| < \delta$, kde $C = [c_1, c_2, \ldots, c_n] \in \mathbb{R}^n$ a δ je kladné reálné číslo, se nazývá kruhové okolí bodu C a značí se U_C^δ.

Čtvercové okolí bodu Množina všech bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, které splňují $|x_i - c_i| < \delta$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, kde $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ a δ je kladné reálné číslo, se nazývá čtvercové okolí bodu C a značí se $U_{\square C}^\delta$

Vnitřní bod množiny Bod $C \in M$ je vnitřní bod množiny $M \subset \mathbb{R}^n$, jestliže existuje takové okolí U_C^δ, že platí $U_C^\delta \subset M$.

Otevřená množina Otevřená množina je množina, jejíž každý bod je vnitřní.

Vlastnosti podmnožin v $\mathbb{R}^n$

Hraniční bod Hraniční bod $D \in M$ množiny M je bod, v jehož každém okolí U_D^δ jsou jak body z M, tak body z $\mathbb{R}^n \setminus M$. (Obecně hraniční body nemusí být prvky M).

Uzavřená množina Pokud všechny hraniční body množimy M patří do M, řekneme, že množina M je uzavřená.

Hranice množiny Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá hranice množiny M.

Omezená množina Nechť M_i je množina $i-$ tých souřadnic všech bodů $X \in M$. Pokud všechny množiny M_i, $i = 1, \dots, n$ jsou omezené (všechny leží unvitř jistého obdélníku), pak množinu M nazýváme omezenou množinou.

Kompaktní množina Kompaktní množima je taková množina, která je zároveň omezená a uzavřená.

3.1.1 Parciální derivace

Jak bylo již uvedeno v kapitole o derivaci funkce jedné proměnné, geometrický význam derivace funkce jedné proměnné v určitém bodě je směrnice tečny v daném bodě ke grafu funkce. Pokud uvažujeme například funkci dvou proměnných, pak graf takové funkce je jistá plocha v prostoru. A tečen v daném bodě ke grafu takové funkce (k ploše v prostoru) bude nekonečně mnoho. Proto z těchto tečen budeme vybírat jen určité tečny. Jednak to bude tečna ke grafu funkce v daném bodě rovnoběžná s rovinou osu x. A druhá tečna ke grafu funkce v daném bodě, jejíž směrnice nás bude zajímat, bude tečna rovnoběžná s osou y. Takovým derivacím budeme říkat parciální derivace. Budou to derivace ve směru souřadných os x a y. Připomeneme definici derivace funkce jedné proměnné.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

V úvodu této kapitoly jsme si uvědomili, že zafixujeme-li ve funkci dvou proměnných jednu proměnnou, stává se z ní funkce jedné proměnné. Na tuto neměnnou proměnnou nahlížíme jako na konstantu.

Parciální derivace funkce dvou proměnných

Parciální derivací funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x budeme nazývat limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Parciální derivací funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné y budeme nazývat limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Tyto limity mohou být jak vlastní tak nevlastní. Mluvíme pak o vlastní resp. nevlastní parciální derivaci.

Označení pro parciální derivace není jednotné. Parciální derivace podle proměnné x může být označena $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ nebo $f'_x(x,y)$. Analogicky bývá označena parciální derivace podle proměnné y, totiž $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ nebo $f'_y(x,y)$.

Pokud budeme pracovat s funkcemi více než dvou proměnných, bude parciální derivace v bodě $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ definována následovně.

Parciální derivace funkce n proměnných

Parciální derivací funkce n proměnných $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ podle proměnné x_i v bodě $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ budeme nazývat limitu

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h}.$$

Pokud každému bodu z definičního oboru funkce přiřadíme hodnotu parciální derivace v tomto bodě (za předpokladu existence parciální derivace), dostáváme pojem parciální derivace jako funkce. Při výpočtu funkčního předpisu parciálních derivací využijeme vlastností parciálních derivací funkce. Ty jsou stejné jako vlastnosti obyčejné derivace funkce jedné proměnné. Přesto si je znovu raději připomeneme.

Vlastnosti parciální derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí více proměnných

Mějme funkce $f(X)$ a $g(X)$ n proměnných, kde $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Pak platí

derivace součtu $\frac{\partial (f+g)(X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \frac{\partial g(X)}{\partial x_i}$

derivace rozdílu $\frac{\partial (f-g)(X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(X)}{\partial x_i}$

derivace součinu $\frac{\partial (f\cdot g)(X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \cdot g(X) + f(X) \cdot \frac{\partial g(X)}{\partial x_i}$

derivace podílu $\frac{\partial (\frac{f}{g})(X)}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \cdot g(X) - f(X) \cdot \frac{\partial g(X)}{\partial x_i}}{g^2(X)}$

Dále si uvědomme, že vzorce pro derivace základních elementárních funkcí zůstávají v platnosti. Použití těchto vzorců a vlastností si ukážeme na následujících příkladech. Vždy si předem uvědomme, podle jaké proměnné derivujete a na ostatní proměnné pohlížíme jako na konstantu.

3.1. Nalezněte předpis prvních paciálních derivací funkce $f(x,y) = x^y$ podle obou proměnných.

Řešení: Uvědomme si, že pokud budeme derivovat podle proměnné x, proměnná y je konstanta a jedná se pak o mocninnou funkci. Pokud budeme derivovat podle proměnné y, pak proměnná x je konstanta a zadaná funkce je exponenciální funkce.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y \cdot x^{y-1} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= x^y \cdot \ln x \end{aligned}$$

3.2. Nalezněte předpis prvních paciálních derivací funkce $f(x,y) = 2\sin x + x \ln y$ podle obou proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je ve tvaru součtu, podle pravidel pro derivování budeme derivovat každý sčítanec. Při derivaci jednotlivých sčítanců použijeme vlastnost, že derivace konstanty je nula a derivujeme-li součin konstanty a funkce, konstantu necháme beze změny a derivujeme jen funkci.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2\cos x + 1\cdot \ln y = 2\cos x + \ln y\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 0 + x\cdot\frac{1}{y} = \frac{x}{y}\end{aligned}$$

3.3. Nalezněte předpis prvních paciálních derivací funkce

$$f(x,y) = 3x^2y - 5x^3\sqrt{y}$$

podle obou proměnných.

Řešení: Derivujme nejprve podle proměnné x. S proměnnou y zacházíme v tomto případě jako s konstantou. Funkce je ve tvaru rozdílu, derivujeme každý činitel rozdílu zvlášť.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3\cdot 2\cdot x\cdot y - 5\cdot 3\cdot x^2\sqrt{y} = 6xy - 15x^2\sqrt{y}$$

Než začneme derivovat funkci podle proměnné y, přepíšeme v předpisu funkce f odmocninu na lomenou mocninu, $f(x,y) = 3x^2y - 5x^3y^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2\cdot 1 - 5x^3\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = 3x^2 - \frac{5x^3}{2\sqrt{y}}$$

V následujícím příkladě připomeneme derivaci složené funkce jedné proměnné. Derivace složené funkce jedné proměnné se počítala jako součin derivace vnější funkce a derivace vnitřní funkce.

3.4. Nalezněte předpis prvních paciálních derivací funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ podle obou proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je složená funkce. Vnější funkce je přirozený logaritmus, vnitřní funkce je součet druhých mocnin obou proměnných. Nejprve zderivujeme vnější funkci a necháme jí argument ve tvaru součtu druhých mocnin obou proměnných a tuto derivaci vynásobíme derivací argumentu.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x + 0 = \frac{2x}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 0 + 2y = \frac{2y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

3.5. Nalezněte předpis prvních paciálních derivací funkce $f(x,y) = \ln 2x\cdot\sqrt{3x+5y}$ podle obou proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je ve tvaru součinu, proto budeme derivovat podle příslušného vzorce. Druhou odmocninu v předpisu funkce pro snadnější derivování přepíšeme na mocninu, $f(x,y) = \ln 2x\cdot(3x+5y)^{\frac{1}{2}}$. V derivaci užijeme i vzorce pro derivování složené funkce.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{2x}\cdot 2\cdot\sqrt{3x+5y} + \ln 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(3x+5y)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3+0)\\ &= \frac{1}{x}\cdot\sqrt{3x+5y} + \frac{3\ln 2x}{2\sqrt{3x+5y}}\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 0\cdot(3x+5y)^{\frac{1}{2}} + \ln 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(3x+5y)^{-\frac{1}{2}}\cdot(0+5) = \frac{5\ln 2x}{2\sqrt{3x+5y}}\end{aligned}$$

3.6. Nalezněte předpis prvních paciálních derivací funkce $f(x,y) = \frac{3xy}{x-y}$ podle obou proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je ve tvaru podílu dvou funkcí, proto při jejím derivování využijeme vzorce pro derivaci podílu.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{3y\cdot 1\cdot (x-y) - 3xy\cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{3y^2}{(x-y)^2}\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{3x\cdot 1\cdot (x-y) - 3xy\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{3x^2}{(x-y)^2}\end{aligned}$$

3.7. Nalezněte předpis prvních paciálních derivací funkce $f(x,y,z) = (x + \operatorname{tg} z)e^{xyz^2}$ podle všech proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je ve tvaru součinu dvou funkcí, proto při jejím derivování využijeme vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= 1\cdot e^{xyz^2} + (x+\operatorname{tg} z)e^{xyz^2}\cdot yz^2 = e^{xyz^2}(1+(x+\operatorname{tg} z)yz^2)\\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= 0\cdot e^{xyz^2} + (x+\operatorname{tg} z)e^{xyz^2}\cdot xz^2 = (x+\operatorname{tg} z)xz^2e^{xyz^2}\\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= (0+\frac{1}{\cos^2 z})\cdot e^{xyz^2} + (x+\operatorname{tg} z)e^{xyz^2}\cdot xy2z\\ &= e^{xyz^2}[\frac{1}{\cos^2 z} + 2xyz(x+\operatorname{tg} z)]\end{aligned}$$

Umíme tedy spočítat derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí. Než si uvedeme vzorec pro derivaci složené funkce více proměnných, zadefinujeme si nejprve pojem složené funkce více proměnných.

Složená funkce více proměnných

Nechť funkce $f(u_1,u_2,\dots,u_p)$ je definována na množině $D \subset \mathbb{R}^p$ a nechť funkce $u_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ pro $i = 1,\dots,p$ jsou funkce n proměnných definovaných na množině $G \subset \mathbb{R}^n$. Dále nechť pro každé $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in G$ je $u_i(x_1,x_2,\dots,x_n) \in D$ pro $i = 1,\dots,p$. Pak funkce

$$h(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(u_1(x_1,\dots,x_n),u_2(x_1,\dots,x_n),\dots,u_p(x_1,\dots,x_n))$$

se nazývá složená funkce n proměnných.

Příkladem takové složené funkce dvou proměnných je funkce definovaná na $\mathbb{R}^2$ $h(x,y) = \ln(e^{x^2y} + (x^3-y)^2)$. V tomto případě má vnější funkce předpis $f(u_1,u_2) = \ln(u_1+u_2^2)$, kde vnitřní funkce jsou $u_1(x,y) = e^{x^2y}$ a $u_2(x,y) = x^3 - y$.

Derivace složené funkce více proměnných

Mějmě funkci $f(u_1,u_2,\dots,u_r)$ r proměnných, která má spojité parciální derivace na množině D a nechť funkce $u_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ pro $i = 1,\dots,r$ jsou funkce n proměnných, které mají spojité parciální derivace na množině G a dále nechť platí $u_i(x_1,x_2,\dots,x_n) \in D$ pro $i = 1,\dots,r$ a pro všechny $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in G$, pak složená funkce

$$h(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(u_1(x_1,\dots,x_n),u_2(x_1,\dots,x_n),\dots,u_r(x_1,\dots,x_n))$$

má spojité parciální derivace na množině G a pro všechna x_i, $i = 1,\dots,n$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_i}.$$

3.8. Nalezněte předpis paciálních derivací funkce $h(x,y) = \ln(e^{x^2y} + (x^3 - y)^2)$ podle obou proměnných.

Řešení: Derivaci zadané funkce nalezneme dvojím způsobem. Jednak budeme postupovat podle vzorce pro derivaci funkce více proměnných z předchozí věty, jednak budeme derivovat zadanou funkci h podle doposud známých pravidel.

1.způsob Funkci h přepíšeme jako složenou funkci

$$h(x,y) = f(u_1, u_2) = \ln(u_1 + u_2^2),$$

kde $u_1(x,y) = e^{x^2y}$ a $u_2(x,y) = x^3 - y$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} \\
&= \frac{1}{u_1 + u_2^2} \cdot 1 \cdot e^{x^2y} 2xy + \frac{1}{u_1 + u_2^2} \cdot 2u_2 \cdot 3x^2 \\
&= \frac{2xye^{x^2y}}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} + \frac{6x^2(x^3 - y)}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \\
&= \frac{2xye^{x^2y} + 6x^2(x^3 - y)}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \\
\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y} \\
&= \frac{1}{u_1 + u_2^2} \cdot 1 \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 + \frac{1}{u_1 + u_2^2} \cdot 2u_2 \cdot (-1) \\
&= \frac{e^{x^2y}}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \cdot x^2 - \frac{2(x^3 - y)}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \\
&= \frac{x^2e^{x^2y} - 2(x^3 - y)}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2}
\end{aligned}$$

2.způsob Zadanou funkci $h(x,y) = \ln(e^{x^2y} + (x^3 - y)^2)$ budeme derivovat přímo, jen se znalostí vzorce pro derivování funkce jedné proměnné. Při výpočtu parciální derivace se totiž na funkci více proměnných díváme jen jako na funkci jedné proměnné.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \cdot (2xye^{x^2y} + 2(x^3 - y) \cdot 3x^2) \\
&= \frac{2xye^{x^2y} + 2(x^3 - y) \cdot 3x^2}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \\
&= \frac{2xye^{x^2y} + 6x^2(x^3 - y)}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \\
\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} &= \frac{1}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \cdot (e^{x^2y} \cdot x^2 + 2(x^3 - y) \cdot (-1)) \\
&= \frac{e^{x^2y} \cdot x^2 + 2(x^3 - y) \cdot (-1)}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2} \\
&= \frac{x^2e^{x^2y} - 2(x^3 - y)}{e^{x^2y} + (x^3 - y)^2}
\end{aligned}$$

Derivace funkce více proměnných v bodě A

Derivací funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bodě $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ budeme nazývat vektor parciálních derivací této funkce podle všech proměnných v bodě A

$$f'(A) = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(A)}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial f(A)}{\partial x_n} \right)$$

Dále budeme uvažovat vektor parciálních derivací v každém bodě z definičního oboru funkce f, v nichž existují vlastní parciální derivace. Takový vektor budeme nazývat derivací funkce f nebo-li gradient funkce.

Derivace funkce více proměnných, gradient

Pro všechna $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, v nichž existují vlastní parciální derivace $\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_n}$, budeme vektor

$$f'(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \right)$$

nazývat derivací funkce f nebo-li gradient funkce.

Geometricky gradient funkce f v bodě X vyjadřuje směr největšího růstu funkce f v okolí bodu X.

Parciální derivace vyšších řádů

Stejně jako v případě derivace vyšších řádů funkce jedné proměnné i v případě funkce více proměnných se derivace vyšších řádů, obecně n- tá derivace, bude počítat rekurzivně, tady zderivováním n-té derivace.

Druhá parciální derivace

Nechť existuje druhá derivace funkce $f(x, y)$, pak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Obecně: Je-li f funkce n proměnných, pak defivujeme-li funkci nejprve podle proměnné x_i, pak podle x_j pro $i \neq j$, píšeme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Vidíme, že pokud je funkce dvou proměnných, první derivace existují dvě a druhé derivace existují čtyři. Funkce tří proměnných má tři první derivace podle každé z proměnných. Druhých derivací takové funkce bude devět. Pokud je funkce obecně n proměnných, prvních derivací bude n, druhých n^2. Druhá parciální derivace funkce f n proměnných nejprve podle proměnné x_i, pak podle x_j pro $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ se nazývají smíšené derivace.

Postačující podmínka rovnosti smíšených druhých derivací

Jestliže existují druhé smíšené parciální derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ a jsou spojité v tomto bodě, pak platí

$$\frac{\partial^2 f(a_1,a_2)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(a_1,a_2)}{\partial y \partial x}$$

Víme, že elementární funkce n proměnných jsou spojité v každém bodě svých definičních oborů. Pak ve všech bodech, v nichž existují následující derivace, platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

O druhých parciálních derivacích také mluvíme jako o derivacích druhého řádu. Analogicky n-tou derivaci nazýváme také derivací n-tého řádu.

3.9. Nalezněte předpis všech druhých paciálních derivací funkce

$$f(x,y) = x^2 y - \ln xy.$$

Řešení: Nejprve spočteme první derivace.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy - \frac{1}{xy} \cdot y = 2xy - \frac{y}{xy} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 - \frac{1}{xy} \cdot x = x^2 - \frac{x}{xy}
\end{aligned}$$

Zderivováním prvních derivací dostaneme druhé derivace.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(2xy - \frac{y}{xy})}{\partial x} = 2y - \frac{0 \cdot xy - 2xy \cdot y}{(xy)^2} = 2y - \frac{-2xy^2}{x^2y^2} = 2y + \frac{2}{x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(2xy - \frac{y}{xy})}{\partial y} = 2x - \frac{1 \cdot xy - y \cdot x}{(xy)^2} = 2x - \frac{0}{(xy)^2} = 2x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial(x^2 - \frac{x}{xy})}{\partial x} = 2x - \frac{1 \cdot xy - x \cdot y}{(xy)^2} = 2x - \frac{0}{(xy)^2} = 2x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(x^2 - \frac{x}{xy})}{\partial y} = 0 - \frac{0 \cdot xy - x \cdot x}{(xy)^2} = \frac{x^2}{x^2y^2} = \frac{1}{y^2}
\end{aligned}$$

Všimněte si, že smíšené druhé parciální derivace mají stejný předpis. Platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

3.10. Nalezněte předpis všech druhých paciálních derivací funkce

$$f(x,y,z) = (x - z^3 y)^2 + \operatorname{tg}(xyz).$$

Řešení: Nejprve spočteme první derivace. Budeme využívat všech pravidel pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu. V případě, že ve funkce $\mathrm{tg}(xyz)$ vždy dvě proměnné zafixujeme, díváme se na tuto funkci jako funkci jedné proměnné. Jedná se o složenou funkci a ji budeme derivovat jako složenou funkci.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x-z^3y)^1\cdot(1+0)+\frac{1}{\cos^2(xyz)}\cdot yz = 2(x-z^3y)+\frac{yz}{\cos^2(xyz)}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x-z^3y)^1\cdot(0-z^3)+\frac{1}{\cos^2(xyz)}\cdot xz = -2z^3(x-z^3y)+\frac{xz}{\cos^2(xyz)}\\
&= -2z^3x+2z^6y+\frac{xz}{\cos^2(xyz)}\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 2(x-z^3y)^1\cdot(0-3z^2y)+\frac{1}{\cos^2(xyz)}\cdot xy = -6z^2y(x-z^3y)+\frac{xy}{\cos^2(xyz)}\\
&= -6xyz^2+6y^2z^5+\frac{xy}{\cos^2(xyz)}
\end{aligned}$$

Každou z prvních derivací zderivujeme znovu podle každé ze tří proměnných. Druhých derivací bude devět.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(2(x-z^3y)+\frac{yz}{\cos^2(xyz)})}{\partial x}\\
&= 2-0+\frac{0\cdot\cos^2(xyz)-yz\cdot 2\cos(xyz)\cdot\sin(xyz)\cdot yz}{\cos^4(xyz)}\\
&= 2-\frac{(yz)^2\cdot\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial(2(x-z^3y)+\frac{yz}{\cos^2(xyz)})}{\partial y}\\
&= 2(0-z^3)+\frac{z\cos^2(xyz)-yz2\cos(xyz)\sin(xyz)\cdot xz}{\cos^4(xyz)}\\
&= -2z^3+\frac{z\cos^2(xyz)-xyz^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} &= \frac{\partial(2(x-z^3y)+\frac{yz}{\cos^2(xyz)})}{\partial z}\\
&= 2(0-3z^2y)+\frac{y\cos^2(xyz)-yz2\cos(xyz)\sin(xyz)\cdot xy}{\cos^4(xyz)}\\
&= -6yz^2+\frac{y\cos^2(xyz)-xy^2z\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial(-2z^3x+2z^6y+\frac{xz}{\cos^2(xyz)}}{\partial x}\\
&= -2z^3+0+\frac{z\cdot\cos^2(xyz)-xz2\cos(xyz)\sin(xyz)\cdot yz}{\cos^4(xyz)}\\
&= -2z^3+\frac{z\cos^2(xyz)-xyz^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(-2z^3x+2z^6y+\frac{xz}{\cos^2(xyz)})}{\partial y}\\
&= 0+2z^6+\frac{0\cdot\cos^2(xyz)-xz2\cos(xyz)\sin(xyz)\cdot xz}{\cos^4(xyz)}\\
&= 2z^6-\frac{(xz)^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial(-2z^3x + 2z^6y + \frac{xz}{\cos^2(xyz)})}{\partial z} \\
&= -2 \cdot 3z^2x + 2 \cdot 6z^5y + \frac{x\cos^2(xyz) - xz2\cos(xyz)\sin(xyz) \cdot xy}{\cos^4(xyz)} \\
&= -6z^2x + 12z^5y + \frac{x\cos^2(xyz) - x^2yz\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial(-6xyz^2 + 6y^2z^5 + \frac{xy}{\cos^2(xyz)})}{\partial x} \\
&= -6yz^2 + 0 + \frac{y\cos^2(xyz) - xy2\cos(xyz)\sin(xyz) \cdot yz}{\cos^4(xyz)} \\
&= -6yz^2 + \frac{y\cos^2(xyz) - xy^2z\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial(-6xyz^2 + 6y^2z^5 + \frac{xy}{\cos^2(xyz)})}{\partial y} \\
&= -6xz^2 + 6 \cdot 2yz^5 + \frac{x\cos^2(xyz) - xy2\cos(xyz)\sin(xyz) \cdot xz}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -6xz^2 + 12yz^5 + \frac{x\cos^2(xyz) - x^2yz\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial(-6xyz^2 + 6y^2z^5 + \frac{xy}{\cos^2(xyz)})}{\partial z} \\
&= -12xyz + 6y^2 \cdot 5z^4 + \frac{0 \cdot \cos^2(xyz) - xy2\cos(xyz)\sin(xyz) \cdot xy}{\cos^4(xyz)} \\
&= -12xyz + 30y^2z^4 - \frac{(xy)^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

Druhé derivace jsou spojité funkce a proto smíšené derivace jsou jsou si rovny.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2z^3 + \frac{z\cos^2(xyz) - xyz^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -6yz^2 + \frac{y\cos^2(xyz) - xy^2z\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -6xz^2 + 12yz^5 + \frac{x\cos^2(xyz) - x^2yz\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

Druhé derivace funkce obecně n-proměnných můžeme uspořádat do matice řádu n. Tato matice se nazývá Hessova matice.

Hessova matice

Nechť existují druhé parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Matice

$$H_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_n} \\
\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_2 \partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_n^2}
\end{pmatrix}$$

se nazývá Hessova matice.

Pro elementární funkce n proměnných je Hessova matice symetrická matice typu $n \times n$.

V následujícím příkladu si ukážeme nejen sestavení takové matice v konkrétním době, ale zopakujeme i výpočet determinantu matice.

3.11. Vypočtěte determinant Hessovy matice funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení: Zadaná funkce je dvou proměnných. Hessova matice této funkce je matice řádu dva. Spočteme nejprve první parciální derivace podle každé z proměnných.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{y \cdot (x^2+y^2) - xy(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{x \cdot (x^2+y^2) - xy(0+2y)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

Nyní spočteme všechny druhé parciální derivace.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}}{\partial x} = \frac{(0-2xy)\cdot(x^2+y^2)^2 - (y^3-x^2y)\cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)[-2xy(x^2+y^2) - 4x(y^3-x^2y)]}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2x^3y - 6xy^3}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}}{\partial y} = \frac{(3y^2-x^2)\cdot(x^2+y^2)^2 - (y^3-x^2y)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)[(3y^2-x^2)(x^2+y^2) - 4y(y^3-x^2y)]}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{3y^2x^2 + 3y^4 - x^4 - x^2y^2 - 4y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6y^2x^2 - y^4 - x^4}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}}{\partial x} = \frac{(3x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)^2 - (x^3-xy^2)2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)\cdot[(3x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2) - 4x(x^3-xy^2)]}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(3x^4 + 3x^2y^2 - x^2y^2 - y^4) - 4x^3 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-x^4 + 6x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}}{\partial y} = \frac{-2xy\cdot(x^2+y^2)^2 - (x^3-xy^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)[-2xy(x^2+y^2) - 4y(x^3-xy^2)]}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2yx^3 - 2xy^3 - 4yx^3 + 4xy^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-6yx^3 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že smíšené derivace vyšly stejné. Nyní zbývá vypočítat všechny druhé derivace v bodě $[1,1]$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{2\cdot 1^3\cdot 1 - 6\cdot 1^3}{(1^2+1^2)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} &= \frac{6\cdot 1^2\cdot 1^2 - 1^4 - 1^4}{(1^2+1^2)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} &= \frac{-1^4 + 6\cdot 1^2\cdot 1^2 - 1^4}{(x1^2+1^2)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{-6\cdot 1\cdot 1^3 + 2\cdot 1\cdot 1^3}{(1^2+1^2)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pak zapíšeme Hessovu matici v bodě $[1,1]$ a determinant spočteme křížovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

3.1.2 Diferenciál funkce více proměnných

Stejně jako v případě diferenciálu funkce jedné proměnné si ukážeme, že i pomocí diferenciálu funkce více proměnných můžeme zjistit přibližnou funkční hodnotu funkce více proměnných v nějakém bodě definičního oboru. Ukážeme si vše nejprve na funkci dvou proměnných, pak definici diferenciálu rozšíšíme na funkci více než dvou proměnných. Předpokládejme, že funkce $f(x,y)$ je definována na množině $M \subseteq D_f$. Dále máme $X_0 = [x_0, y_0] \in M$ a funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace a nakonec uvažujme libovolný bod $X = [x,y] \in M$, který je blízko bodu $X_0 = [x_0, y_0]$. V bodě $f(X_0)$ sestrojíme tečny ke grafu funkce $f(x,y)$ ve směrech os x a y. Směrnice těchto tečen jsou parciální derivace podle x a podle y v bodě $X_0 = [x_0, y_0]$. Tyto přímky určují rovinu, kterou nazveme tečnou rovinou. Funkční hodnota $f(X)$ se pak dá přibližně určit pomocí $f(X_0)$ a hodnot parciálních derivací funkce f v bodě $X_0 = [x_0, y_0]$. Platí

$$f(X) \approx f(X_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Rozdíl, mezi takto vypočtenou přibližnou hodnotou funkce f v bodě $X = [x,y]$ a hodnotou $f(X_0)$ budeme nazývat diferenciál funkce f v bodě $X_0 = [x_0, y_0]$. Označme změnu proměnné x $\Delta x = x - x_0$ a změnu proměnné y $\Delta y = y - y_0$. Jestliže předpokládáme, že bod $X = [x,y]$ je libovolně blízko bodu $X_0 = [x_0, y_0]$, tedy $\Delta x \to 0$ a $\Delta y \to 0$, pak píšeme změny jednotlivých proměnných ve tvaru $\mathbf{d}x$ a $\mathbf{d}y$. Diferencál funkce dvou proměnných pak budeme psát ve tvaru

$$\mathbf{d}(X_0) = \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}\mathbf{d}(x) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}\mathbf{d}(y).$$

Takto zavedený pojem diferenciálu funkce dvou proměnných si zobecníme pro funkce obecně více proměnných.

Diferenciál funkce více proměnných

Nechť funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v bodě $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ spojité parciální derivace. Pak výraz $\mathbf{d}(A)$, určený vztahem

$$\mathbf{d}(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}\mathbf{d}x_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}\mathbf{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n}\mathbf{d}x_n$$

nazýváme diferenciál funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bodě $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$

3.12. Určete diferenciál funkce dvou proměnných $f(x,y) = e^{y^2-x}$.

Řešení: Nejprve spočteme parciální derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{y^2-x} \cdot (-1) = -e^{y^2-x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{y^2-x} \cdot 2y = 2ye^{y^2-x}\end{aligned}$$

Pak

$$\mathbf{d}f(x,y) = -e^{y^2-x}\mathbf{d}x + 2ye^{y^2-x}\mathbf{d}y.$$

3.13. Určete diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{3x-5y}$ v bodě $C = [3,1]$.

*Řešení:*Funkci přepíšeme do tvaru $f(x,y) = (3x-5y)^{\frac{1}{2}}$ a spočteme parciální derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2}(3x-5y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-5y}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2}(3x-5y)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-5) = -\frac{5}{2\sqrt{3x-5y}}\end{aligned}$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $C = [3,1]$ jsou

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(3,1)}{\partial x} &= \frac{3}{2\sqrt{3\cdot 3-5\cdot 1}} = \frac{3}{4} \\ \frac{\partial f(3,1)}{\partial y} &= -\frac{5}{2\sqrt{3\cdot 3-5\cdot 1}} = -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

Pak

$$\mathbf{d}f(3,1) = \frac{3}{4}\mathbf{d}x - \frac{5}{4}\mathbf{d}y.$$

V dalším příkladu si ukážeme, jak se dá diferenciál funkce využít k určení přibližné hodnoty určitého výrazu.

3.14. Určete přibližnou hodnotu výrazu $P = 2,05^{4,94}$.

*Řešení:*Nejprve si zadaný výraz zapíšeme jako funkční hodnotu určité funkce v daném bodě. Pro funkci $f(x,y) = x^y$ platí $P = f(2,05, 4,94)$. Bod $[2,05, 4,94]$ je blízko bodu $[2,5]$. Změna proměnné x je $\mathbf{d}x = 0,05$, měna proměnné y je $\mathbf{d}y = -0,06$. Pro vyjádření difereciálu vypočteme parciální derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y \cdot x^{y-1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^y \cdot \ln x\end{aligned}$$

Vypočteme hodnoty parciálních derivací v bodě $[2,5]$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(2,5)}{\partial x} &= 5 \cdot 2^{5-1} = 80 \\ \frac{\partial f(2,5)}{\partial y} &= 2^5 \cdot \ln 2 = 32\ln 2\end{aligned}$$

Diferenciál funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $[2,5]$ má hodnotu

$$\mathbf{d}f(2,5) = 80 \cdot 0,05 + 32\ln 2 \cdot (-0,06) = 4 - 1,92\ln 2$$

Pak

$$P \approx 2^5 + 4 - 1,92\ln 2 = 34,66915741.$$

Pro kontrolu, přesná hodnota je $P = 34,78801$.

V další části o lokálních extrémech funkce budeme potřebovat diferenciál druhého řádu. Tento pojem nejprve zavedeme.

Diferenciál druhého řádu

Nechť má funkce f v bodě $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spojité druhé parciální derivace. Diferenciál druhého řádu funkce f v bodě $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definujeme rovností

$$\mathbf{d}^2 f(X) = \mathbf{d}(\mathbf{df(X)})$$

Pro funkci dvou proměnných můžeme psát

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^2 f(X) &= \mathbf{d}(\mathbf{d}f(X)) = \mathbf{d}(\frac{\partial f(X)}{\partial x}\mathbf{d}(x) + \frac{\partial f(X)}{\partial y}\mathbf{d}(y)) \\
&= \frac{\partial(\frac{\partial f(X)}{\partial x}\mathbf{d}(x) + \frac{\partial f(X)}{\partial y}\mathbf{d}(y))}{\partial x}\mathbf{d}(x) + \frac{\partial(\frac{\partial f(X)}{\partial x}\mathbf{d}(x) + \frac{\partial f(X)}{\partial y}\mathbf{d}(y))}{\partial y}\mathbf{d}(y) \\
&= \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2}(\mathbf{d}(x))^2 + 2\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y}\mathbf{d}(x)\mathbf{d}(y) + \frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2}(\mathbf{d}(y))^2.
\end{aligned}$$

Pokud se na diferenciál druhého řádu podíváme jako na funkci proměnných $\mathbf{d}(x)$ a $\mathbf{d}(y)$, jedná se o kvadratickou formu. A každou kvadratickou formu můžeme zapsat pomocí matice. V tomto případě je zmíněná matice Hessova matice. Označíme-li řádkový vektor $\mathbf{d}^T(X) = (\mathbf{d}(x), \mathbf{d}(y))$, můžeme psát

$$\mathbf{d}^2 f(X) = \mathbf{d}^T(X) H_f(X) \mathbf{d}(X).$$

3.15. Určete diferenciál druhého řádu funkce dvou proměnných $f(x, y) = \ln(y - x)$ v bodě $C = [5, 4]$.

Řešení: Vypočtěme nejprve první parciální derivace.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(X)}{\partial x} &= \frac{1}{y-x} \cdot (-1) = \frac{-1}{y-x} \\
\frac{\partial f(X)}{\partial x} &= \frac{1}{y-x} \cdot (1) = \frac{1}{y-x}
\end{aligned}$$

Dále určeme druhé parciální derivace.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2} &= \frac{\partial(\frac{-1}{y-x})}{\partial x} = \frac{0 \cdot (y-x) - (-1) \cdot (-1)}{(y-x)^2} = \frac{-1}{(y-x)^2} \\
\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(\frac{-1}{y-x})}{\partial y} = \frac{0 \cdot (y-x) - (-1) \cdot (1)}{(y-x)^2} = \frac{1}{(y-x)^2} \\
\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(\frac{1}{y-x})}{\partial x} = \frac{0 \cdot (y-x) - (1) \cdot (-1)}{(y-x)^2} = \frac{1}{(y-x)^2} \\
\frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2} &= \frac{\partial(\frac{1}{y-x})}{\partial x} = \frac{0 \cdot (y-x) - (1) \cdot (1)}{(y-x)^2} = \frac{-1}{(y-x)^2}
\end{aligned}$$

Potom diferenciál druhého řádu bude

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^2 f(X) &= \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2}(\mathbf{d}(x))^2 + 2\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y}\mathbf{d}(x)\mathbf{d}(y) + \frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2}(\mathbf{d}(y))^2 \\
&= \frac{-1}{(y-x)^2}(\mathbf{d}(x))^2 + 2\frac{1}{(y-x)^2}\mathbf{d}(x)\mathbf{d}(y) + \frac{-1}{(y-x)^2}(\mathbf{d}(y))^2 \\
&= -\frac{1}{(y-x)^2}(\mathbf{d}(x))^2 + 2\frac{1}{(y-x)^2}\mathbf{d}(x)\mathbf{d}(y) - \frac{1}{(y-x)^2}(\mathbf{d}(y))^2.
\end{aligned}$$

Nakonec stačí vypočítat hodnotu tohoto diferenciálu v bodě $C = [5, 4]$.

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^2 f(C) &= -\frac{1}{(4-5)^2}(\mathbf{d}(x))^2 + 2\frac{1}{(4-5)^2}\mathbf{d}(x)\mathbf{d}(y) - \frac{1}{(4-5)^2}(\mathbf{d}(y))^2 \\ &= -\mathbf{d}(x)^2 + 2\mathbf{d}(x)\mathbf{d}(y) - \mathbf{d}(y)^2.\end{aligned}$$

Pomocí Hessovy matice můžeme diferenciál druhého řádu matice této funkce zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}(x) & \mathbf{d}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{(y-x)^2} & \frac{1}{(y-x)^2} \\ \frac{1}{(y-x)^2} & \frac{-1}{(y-x)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}(x) \\ \mathbf{d}(y) \end{pmatrix}$$

a v bodě $C = [5, 4]$ máme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}(x) & \mathbf{d}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}(x) \\ \mathbf{d}(y) \end{pmatrix}.$$

Nakonec připomeňme, že Hessova matice je positivně (resp. negativně) definitní, jestliže příslušná kvadratická forma $\mathbf{d}^2 f(X)$ je positivně (resp. negativně) definitní. A Hessova matice je indefinitní, jestliže příslušná kvadratická forma $\mathbf{d}^2 f(X)$ je indefinitní.

3.1.3 Globální a lokální extrémy funkcí více proměnných

Stejně jako v kapitole o lokálních extrémech funkce jedné proměnné, zavedeme si nejprve pojmy lokálních a globálních extrémů funkce více proměnných.

Extrémy funkce na množině

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že v bodě $C \in M \subset D_f$ nastává maximum funkce f vzhledem k množině M, jestliže platí pro všechna pro všechna všechna $X \in M$

$$f(X) \leq f(C).$$

Řekneme, že v bodě $C \in M \subset D_f$ nastává maximum funkce f vzhledem k množině M, jestliže platí pro všechna pro všechna všechna $X \in M$

$$f(X) \geq f(C).$$

Maximum funkce f vzhledem k množině M značíme

$$\max_M f(X) = f(C),$$

Minimum funkce f vzhledem k množině M značíme

$$\min_M f(X) = f(C).$$

Maximum a minimum funkce na množině M souhrnně nazýváme extrémy funkce f vzhledem k množině M.

Pokud je množina M definičním oborem D_f funkce f, nazýváme extrém funkce f vzhledem k množině M globálním (absolutním) extrémem.
Pokud existuje okolí $U_C^\delta \subset D_f$ a bodě C nastává extrém funkce f, nazýváme tento extrém funkce f na množině U_C^δ lokálním extrémem.

Stejně jako u funkcí jedné proměnné uvedeme nyní vlastnosti funkcí více proměnných, které nám umožní vyšetřovat lokální extrémy funkcí více proměnných.

Nutná podmínka pro extrém funkce více proměnných

Jestliže funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v některém svém vnitřním bodě extrém, potom pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí

buď $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ neexistuje.

Tato vlastnost tvrdí, že pokud jsou v jistém bodě parciální derivace podle proměnné x_i buď nulové nebo neexistují pro každé i, pak v tomto bodě je již nutně lokální extrém. Nebo-li, pokud v daném bodě bude platit, že parciální derivace alespoň podle jedné z proměnných je nenulová, nemůže v tomto bodě nastávat lokální extrém.

Stacionární body

Body z definičního oboru funkce f ve kterých je splněna nutná podmínka pro extrém se nazývají stacionární body.

Stacionární body jsou body podezřelé z extrému. Lokální extrém v nich může a nemusí nastat.

3.16. Nalezněte stacionární body funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = 3x^2 + 6xy + y^2 + 3x + 4y + 43$$

Řešení: Definičním oborem zadané funkce jsou všechna reálná čísla. Nyní stačí vypočítat parciální derivace podle obou proměnných a pak pokud budou existovat je položit rovny nule.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x + 6y + 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6x + 2y + 4 \end{aligned}$$

Obě derivace existují v každém reálném bodě. Abychom zjistili stacionární body, položíme parciální derivace rovny nule a dostaneme soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} 6x + 6y + 3 &= 0 \\ 6x + 2y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

nebo-li

$$\begin{aligned} 6x + 6y &= -3 \\ 6x + 2y &= -4 \end{aligned}$$

Vynásobením druhé rovnice mínus jednou a sečtením obou rovnic dostáváme řešení $y = \frac{1}{4}$. Dosazením této hodnoty do kterékoli z obou rovnic dostaneme $x = -\frac{8}{13}$. Daná funkce má jeden stacionární bod $\left[-\frac{8}{13}, \frac{1}{4}\right]$. Ukažme si ještě jednu úlohu na nalezení stacionárních bodů.

3.17. Nalezněte stacionární body funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = 2\sqrt{2x^2+3y^2}$$

*Řešení:*Nejprve musíme určit definiční obor této funkce. Pod druhou odmocninou musí být nezáporná hodnota, tedy $2x^2+3y^2 \geq 0$. Tato nerovnost je splněna pro všechny $x, y \in \mathbb{R}$. Definiční obor této funkce jsou všechna reálné dvojice $[x, y]$. Dále spočteme parciální derivace. Zadaná funkce je složená funkce. Před derivováním přepíšeme odmocninu na složenou mocninu $f(x,y) = 2(2x^2+3y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x = \frac{4x}{\sqrt{2x^2+3y^2}}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6y = \frac{6y}{\sqrt{2x^2+3y^2}}\end{aligned}$$

Obě parciální derivace mají předpis ve tvaru zlomku. Tento zlomek není definován pro $[0, 0]$. V tomto bodě neexistují parciální derivace podle obou proměnných. Zjistili jsme, že zadaná funkce má jeden stacionární bod, a to $[0, 0]$.

Postačující podmínka pro lokální extrém funkce více proměnných

Předpokládejme, že ve vnitřním bodě $C \in D_f$ jsou všechny parciální derivace funkce f jsou nulové a funkce f má na okolí bodu C spojité parciální derivace druhého řádu. Jestliže navíc je kvadratická forma $\mathbf{d}^2 f(C)$ je

positivně definiftní, pak v bodě C nastává **lokální minimum**,

negativně definiftní, pak v bodě C nastává **lokální maximum**,

indefinitní, pak v bodě C, není lokální extrém. V takovém případě řekneme, že bod C je **sedlový bod** funkce f.

Předchozí vlastnost neřeší situaci, kdy kvadratická forma $\mathbf{d}^2 f(C)$ je positivně semidefinitní nebo negativně semidefinitní. V takovém případě musíme lokální extrém vyšetřovat jinak.

Matice příslušná kvadratické formě $\mathbf{d}^2 f(X)$ je Hessova matice. O positivní definitnotnosti, negativní definitnosti či indefitnosti příslušné Hessovy matice v bodě C pak můžeme rozhodnout podle Sylvestrovy věty.

3.18. Nalezněte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

na jejím definičním oboru.

Řešení: Definiční obor zadané funkce je množina $\mathbb{R}^2$. Pro nalezení lokálních extrémů musíme nejprve určit stacionární body. Vypočtěme tedy parciální derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y\end{aligned}$$

Položíme-li tyto parciální derivace rovny nule, dostaneme jednoduchou soustavu dvou lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned}$$

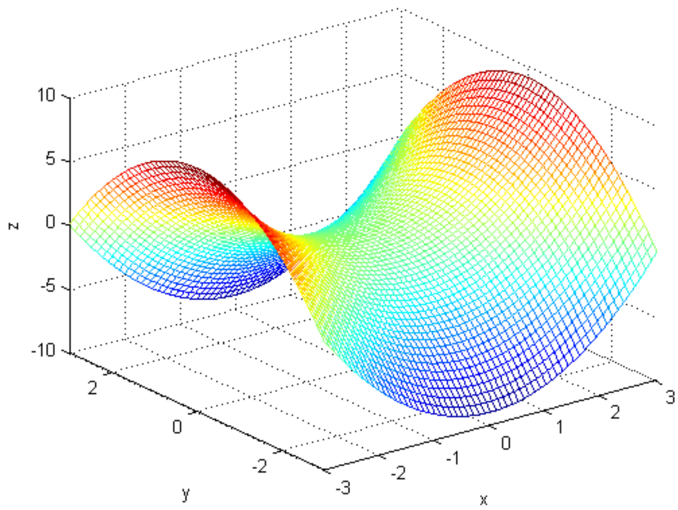
Odtud dostáváme jeden stacionární bod, a to $[0,0]$. Pro ověření, zda v tomto bodě opravdu nastává lokální extrém, musíme vypočítat druhé parciální derivace v bodě $[0,0]$ a uspořádat je do Hessovy matice.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(2x)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial(-2y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(-2y)}{\partial y} = -2 \end{aligned}$$

Hessova matice pak bude následující

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Druhé parciální derivace jsou konstantní a proto Hessova matice zadané funkce v bodě $[0,0]$ bude mít stejný tvar. Musíme spočítat její subdeterminanty a zjistit jejich znaménka. $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$ a $D_1 = 2 > 0$. Podle Sylvestrovy věty je příslušná kvadratická forma indefinitní. Ve stacionárním bodě $[0,0]$ nastává tedy sedlo. V obrázku 3.11 vidíme graf zadané funkce. Tento graf opravdu připomíná koňské sedlo.



Obrázek 3.11: funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$

3.19. Nalezněte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$$

na jejím definičním oboru.

Řešení: Nejprve opět musíme určit definiční obor zadané funkce. Ten je $D_f = \mathbb{R}^2$, protože v předpisu funkce jsou jen mocniny a ty existují pro každé reálné číslo. Dále vypočteme první parciální derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 4x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 6y\end{aligned}$$

Tyto derivace položíme rovny nule a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}4x^3 - 4x &= 0 \\ 3y^2 - 6y &= 0.\end{aligned}$$

Z první rovnice dostáváme $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$. Ze druhé rovnice dostáváme $y = 0$ a $y = 2$. Stacionárních bodů je tedy celkem šest: $[0,0]$, $[1,0]$, $[-1,0]$, $[0,2]$, $[1,2]$ a $[-1,2]$. Pro vyšetření, který ze stacionárních bodů je bodem lokálního extrému, musíme nejprve vypočítat parciální derivace druhého řádu.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(4x^3-4x)}{\partial x} = 12x^2 - 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(4x^3-4x)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial(3y^2-6y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(3y^2-6y)}{\partial y} = 6y - 6\end{aligned}$$

Tyto derivace uspořádáme do Hessovy matice

$$H_f([x,y]) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

Hessovu matici vyjádříme postupně ve všech stacionárních bodech.

$$H_f([0,0]) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad H_f([1,0]) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$H_f([-1,0]) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad H_f([0,2]) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$H_f([1,2]) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad H_f([-1,2]) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dále spočteme determinanty těchto matic.

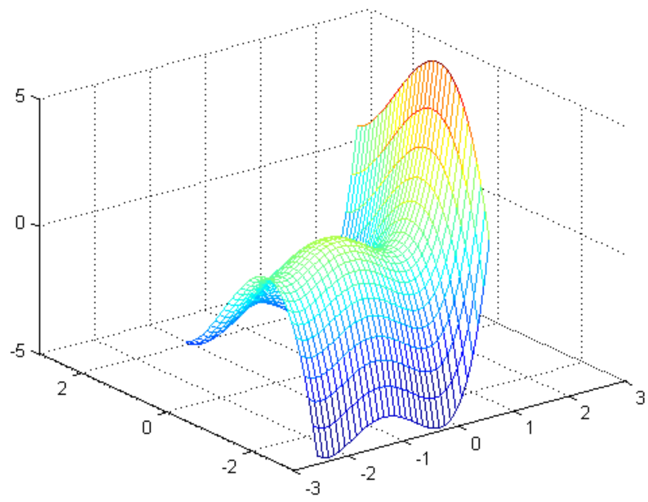
$$\det H_f([0,0]) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 \qquad \det H_f([1,0]) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -48$$

$$\det H_f([-1,0]) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 \qquad \det H_f([0,2]) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -24$$

$$\det H_f([1,2]) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 \qquad \det H_f([-1,2]) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

- V bodě $[0,0]$ nastává lokální maximum, protože $\det H_f([0,0]) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$,
- v bodě $[1,0]$ nastává sedlo, protože $\det H_f([1,0]) < 0$,
- v bodě $[-1,0]$ nastává sedlo, protože $\det H_f([-1,0]) < 0$,
- v bodě $[0,2]$ nastává sedlo, protože $\det H_f([0,2]) < 0$,

- v bodě $[1,2]$ nastává lokální minimum, protože $\det H_f([1,2]) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$,
- v bodě $[-1,2]$ nastává lokální minimum, protože $\det H_f([-1,2]) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$.



Obrázek 3.12: funkce $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^3 - y$

3.20. Nalezněte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = -y - \ln(x^2 - y)$$

na jejím definičním oboru.

Řešení: V předpisu zadané funkce je přirozený logaritmus, což je funkce definovaná pouze pro kladné argumenty. Odtud máme $x^2 - y > 0$, nebo-li $x^2 > y$. Zadaná funkce je definovaná pouze pro ty body z $\mathbb{R}^2$, pro které platí, že druhá mocnina první složky je větší než druhá složka bodu z roviny. Dále spočteme první parciální derivace, položíme je rovny nule a ze vzniklé soustavy rovnic vypočteme stacionární body.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 - \frac{1}{x^2 - y} \cdot 2x = \frac{-2x}{x^2 - y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -1 - \frac{1}{x^2 - y} \cdot (-1) = -1 + \frac{1}{x^2 - y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{x^2 - y} &= 0 \\ -1 + \frac{1}{x^2 - y} &= 0 \end{aligned}$$

Protože zlomek se rovná nule, jestliže se jeho čitatel rovná nule, z první rovnice dostáváme, že $-2x = 0$ a odtud $x = 0$. Tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice a vypočteme proměnnou y.

$$-1 + \frac{1}{0^2 - y} = 0 \quad \Longrightarrow -\frac{1}{y} = 1 \quad \Longrightarrow y = -1$$

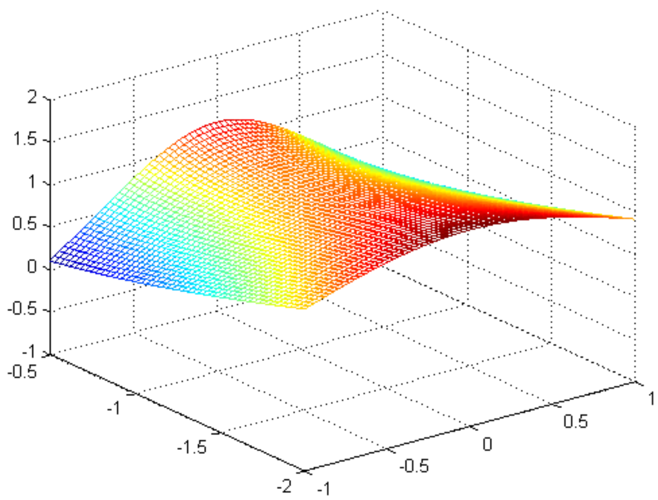
Ověříme ještě, že vypočtený bod leží v definičním oboru funkce. Musí platit $x^2 > y$, $0^2 > -1$. Tato nerovnost platí, vyšetřený bod patří do definičního oboru funkce. Zadaná funkce má tedy pouze jeden stacionární bod $[0,-1]$. Dále vypočteme parciální derivace druhého řádu.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(\frac{-2x}{x^2-y})}{\partial x} = \frac{-2(x^2-y)-2x(2x-0)}{(x^2-y)^2} = \frac{-6x^2+2y}{(x^2-y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial(\frac{-2x}{x^2-y})}{\partial y} = \frac{-2\cdot 0\cdot (x^2-y)-(-2x)(0-1)}{(x^2-y)^2} = \frac{2x}{(x^2-y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial(-1+\frac{1}{x^2-y})}{\partial x} = 0+\frac{0\cdot (x^2-y)-1\cdot (2x-0)}{(x^2-y)^2} = \frac{2x}{(x^2-y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(-1+\frac{1}{x^2-y})}{\partial y} = 0+\frac{0\cdot (x^2-y)-1(0-1)}{(x^2-y)^2} = \frac{1}{(x^2-y)^2}
\end{aligned}$$

Hessova matice zadané funkce bude

$$\begin{pmatrix} \frac{-6x^2+2y}{(x^2-y)^2} & \frac{2x}{(x^2-y)^2}\\ \frac{2x}{(x^2-y)^2} & \frac{1}{(x^2-y)^2} \end{pmatrix}.$$

Její hodnota v bodě $[0,-1]$ je $\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Determinant této matice je $\det H_f([0,-1]) = -2 < 0$. Stacionární bod $[0,-1]$ je sedlovým bodem. Zadaná funkce nemá lokální extrémy.



Obrázek 3.13: funkce $f(x,y) = -y - \ln(x^2-y)$

Nakonec se zabývejme případem, kdy nehledáme jen lokální extrémy, ale globální extrémy. A to navíc v případě, kdy množina, na které vyšetřujeme extrém je kompaktní. O tom, že zadaný problém má řešení nás informuje následující vlastnost.

Weierstrassova věta

Spojitá reálná funkce definovaná na neprázdné kompaktní množině nabývá na této množině svého maxima a minima

Extrémy funkce (ať již lokální nebo globální) mohou nastat v pouze v bodech,pro které platí následující:

1. Parciální derivace podle všech proměnných jsou v těchto bodech rovny 0,
2. Některé (nebo i všechny) parciální derivace v těchto bodech neexistují a zbývající parciální derivace jsou v těchto bodech jsou rovny 0,
3. v hraničních bodech definičního oboru funkce.

Při vyšetřování globálních extrémů spojité funkce na kompaktní množině budeme budeme postupovat následujícím způsobem.

I. Určení podezřelých bodů Určíme všechny body, které splňují jednu z předcházejících tří podmínek.

II. Rozlišení sedel a lokálních extrémů Ze stacionárních bodů vybereme ty body, - které jsou lokálními extrémy.

III. Určení funkčních hodnot Výpočet funkčních hodnot v bodech lokálních extrémů a v hraničních bodech.

IV. Určení globálních extrémů Z bodů lokálních maxim a hraničních bodů vybereme ty, v nichž funkční hodnoty je největší (globální maximum) a Z bodů lokálních minim a hraničních bodů vybereme ty, v nichž funkční hodnoty je nejmenší (globální minimum).

Popsaný postup si předvedeme na následujícím příkladě.

3.21. Nalezněte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = \sqrt{18 - 2x^2} + \sqrt{12 - 3y^2}$$

na jejím definičním oboru.

Řešení: Určíme nejprve definiční obor této funkce. V předpisu funkce jsou druhé odmocniny a ty jsou definovány pouze pro nezáporné argumenty. Odtud dostáváme podmínku, že $18 - 2x^2 \geq 0$ a $12 - 3xy^2 \geq 0$. Vyřešením těchto nerovností dostaneme, že $-3 \leq x \leq 3$ a $-2 \leq y \leq 2$. Definiční obor zadané funkce je tedy obdélník $\{[x, y]; x \in \langle -3, 3\rangle, y \in \langle -2, 2\rangle\}$. Dále určíme stacionární body. Jelikož

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x}{\sqrt{18 - 2x^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-3y}{\sqrt{12 - 3y^2}}, \end{aligned}$$

Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{\sqrt{18 - 2x^2}} &= 0 \\ \frac{-3y}{\sqrt{12 - 3y^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má jediné řešení a to bod $[0, 0]$. Tento bod leží v definičním oboru funkce. Spočteme druhé parciální derivace a přesvědčíme se, zda se jedná o lokální extrém.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(\frac{-2x}{\sqrt{18-2x^2}})}{\partial x} = \frac{-2\sqrt{18 - 2x^2} + 2x\frac{1}{2}\frac{-4x}{\sqrt{18-2x^2}}}{\sqrt{18 - 2x^2}^2} = \frac{-36}{(\sqrt{18 - 2x^2})^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(\frac{-2x}{\sqrt{18-2x^2}})}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial(\frac{-3y}{\sqrt{12-3y^2}})}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(\frac{-3y}{\sqrt{12-3y^2}})}{\partial y} = \frac{3\sqrt{12 + 3y^2} - 3y\frac{1}{2}\frac{-6y}{\sqrt{12-3y^2}}}{(\sqrt{12 - 3y^2})^2} = \frac{-36}{(\sqrt{12 - 3y^2})^3} \end{aligned}$$

Hessova matice zadané funkce bude

$$\begin{pmatrix} \frac{-36}{\sqrt{18-2x^2}^3} & 0 \\ 0 & \frac{-36}{(\sqrt{12-3y^2})^3} \end{pmatrix}.$$

Hessova matice v bodě $[0,0]$ je $\begin{pmatrix} -\frac{36}{(\sqrt{18})^3} & 0 \\ 0 & \frac{-36}{(\sqrt{12})^3} \end{pmatrix}$. Determinant této matice má kladnou hodnotu. Protože druhá parciální derivace podle x je záporná,jediný stacionární bod je tedy lokální maximum. Musíme ještě vyšetřit hranici definičního oboru. Uvažujme jednotlivé hranice obdlélníku,který je definičním oborem funkce. Jednotlivé strany tohoto obdélníku jsou to množiny

- $\{[3,y]; y \in \langle -2, 2\rangle\}$,
- $\{[-3,y]; y \in \langle -2, 2\rangle\}$,
- $\{[x,2]; x \in \langle -3, 3\rangle\}$,
- $\{[x,-2]; x \in \langle -3, 3\rangle\}$.

Na množině $\{[3,y]; y \in \langle -2, 2\rangle\}$ má daná funkce předpis

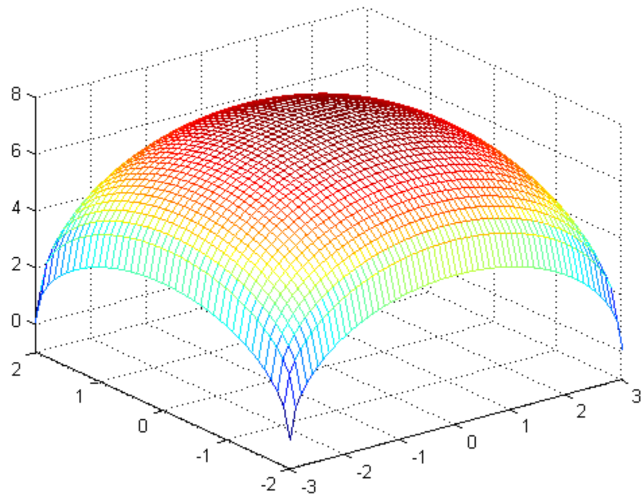
$$g(y) = f(3,y) = \sqrt{12 - 3y^2}.$$

Stejný předpis má funkce na množině $\{[-3,y]; y \in \langle -2, 2\rangle\}$. Jedná se o funkci jedné proměnné. Pro nalezení lokálních extrémů tuto funkci zderivujeme $g'(y) = \frac{-3y}{\sqrt{12-3y^2}}$. Tato derivace je rovna nule v bodě $y = 0$. Platí $0 \in \langle -2, 2\rangle$. Dále tato derivace neexistuje pro $y = 2$ a $y = -2$. Protože druhá derivace $g''(y) = \frac{-36}{\left(\sqrt{12-3y^2}\right)^3}$ je pro $y = 0$ záporná, v tomto bodě nastává lokální maximum. Body $y = 2$ a $y = -2$ jsou body lokálních minim.

Stejně tak daná funkce na množinách $\{[x,2]; x \in \langle -3, 3\rangle\}$ a $\{[x,-2]; x \in \langle -3, 3\rangle\}$ má předpis

$$h(x) = f(x,2) = f(x,-2) = \sqrt{18 - 2y^2}.$$

Derivace této funkce jedné proměnné x $h'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{18-2x^2}}$ je rovna nule pro $x = 0$ a neexistuje pro $x = 2$ a $x = -2$. Pomocí druhé derivace $h''(x) = \frac{-36}{\sqrt{18-2x^2}^3}$, zjistíme, že v bodě $x = 0$ má funkce lokální maximum. V bodech $x = 2$ a $x = -2$ má funkce h lokální minima. Zjistili jsme, že zadaná funkce dvou proměnných má lokální minima v bodech $[-3,2]$, $[3,2]$,$[3,-2]$,$[-3,-2]$ a lokální maxima v bodech $[0,0]$,$[0,2]$,$[3,0]$,$[0,-2]$ a $[-3,0]$. Nyní zjistíme funkční hodnoty v těchto bodech. Pro lokální minima je $f(3,2) = 0$, $f(-3,2) = 0$,$f(-3,-2) = 0$ a $f(3,-2) = 0$. Odtud plyne, že neostrá globální minima nabývá zadaná funkce ve všech těchto bodech. Pro lokální maxima je $f(0,0) = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, $f(-3,0) = 2\sqrt{3}$, $f(3,0) = 2\sqrt{3}$, $f(0,-2) = 3\sqrt{2}$ a $f(0,2) = 3\sqrt{2}$. Největší funkční hodnota je v bodě $[0,0]$ a proto tento bod je bodem globálního maxima. Graf této funkce můžeme vidět na obrázku 3.14.



Obrázek 3.14: funkce $f(x,y) = \sqrt{18-2x^2} + \sqrt{12-3y^2}$

3.1.4 Neřešené příklady

Spočtěte první parciální derivace podle obou proměnných následujících funkcí

3.22. $f(x,y) = 5x^2y^3 + 3\sqrt{x}e^y - \ln x$

3.23. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x+y}}$

3.24. $f(x,y) = \frac{x}{\ln y}$

3.25. $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$

3.26. $f(x,y) = (x-y)\ln(2x+y)$

3.27. $f(x,y) = \sin xy^2 + e^{x^2y}$

3.28. $f(x,y) = \ln\sqrt{2x^3+y^2}$

3.29. $f(x,y) = (3^{xy} - \operatorname{cotg}(x-y))^6$

3.30. $f(x,y) = \frac{ye^x}{x+y^2}$

Spočtěte první parciální derivace podle obou proměnných následujících funkcí v daném bodě C

3.31. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ v $C = [-1,1]$

3.32. $f(x,y) = \sqrt{3xy+y^3}$ v $C = [2,3]$

3.33. $f(x,y) = x\ln(x^2+y)$ v $C = [1,0]$

3.34. $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{xy}$ v $C = [2,-1]$

3.35. $f(x,y) = \ln\sqrt{xy^3}$ v $C = [-1,-1]$

Vypočtěte všechny druhé parciální derivace následujících funkcí

3.36. $f(x,y) = 5xy^2 - \frac{x^3}{y^2}$

3.37. $f(x,y) = \cos xy$

3.38. $f(x,y) = x^y$

3.39. $f(x,y) = (5x-y)^4$

3.40. $f(x,y) = \frac{xy}{y-x}$

Nalezněte Hessovy matice následujících funkcí v bodě A

3.41. $f(x,y) = xy^2 - \frac{y}{x} + 2\sqrt{x}$, $A = [1,2]$

3.42. $f(x,y) = e^{-xy}$, $A = [-1,0]$

Vypočtěte diferenciál prvního a druhého řádu následujících funkcí v bodě A

3.43. $f(x,y) = x^5y^3$, $A = [-1,1]$

3.44. $f(x,y) = \ln(3x-7y^2)$, $A = [1,-1]$

3.45. $f(x,y) = x^2y^3 - x^3 + 3y$, $A = [1,2]$

Pomocí diferenciálu prvního řádu vypočtěte hodnotu následujících výrazů

3.46. $v = \sqrt{4,98 - 1,04^2}$

3.47. $v = \frac{\sqrt{9,09}}{2,96}$

3.48. $v = (4,03 - 1,95)^5$

3.49. $v = \ln(2,05 - 0,98^2)$

Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí

3.50. $f(x,y) = x^2 + \frac{2y^2}{x} + 4y$

3.51. $f(x,y) = xy - x + y$

3.52. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$

3.53. $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$

3.54. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

3.55. $f(x,y) = x^3 + y^3 + x + y$

3.56. $f(x,y) = (x+y^2)e^{\frac{x}{2}}$

3.57. $f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

Nalezněte globální extrémy následujících funkcí

3.58. $f(x,y) = \sqrt{4x - x^2 - 4y^2}$

3.1.5 Výsledky

3.22
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 10xy^3 + \frac{3e^y}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 15x^2y^2 + 3\sqrt{x}e^y$
3.23
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2y^2+xy}{2\sqrt{(x+y)^3}}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^2+xy}{2\sqrt{(x+y)^3}}$
3.24
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\ln y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-x}{y\ln^2 y}$
3.25
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
3.26
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln(2x+y) + \frac{2x-y}{2x+y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\ln(2x+y) + \frac{x-y}{2x+y}$
3.27
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos xy^2 + 2xe^{x^2y}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y\cos xy^2 + e^{x^2y}$
3.28
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{3x^2}{2x^3+y^2}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{2x^3+y^2}$
3.29
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6(3^{xy} - \mathrm{cotg}(x-y))^5(y3^{xy}\ln 3 + \frac{1}{sin^2(x-y)})$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6(3^{xy} - \mathrm{cotg}(x-y))^5(x3^{xy}\ln 3 - \frac{1}{sin^2(x-y)})$
3.30
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{ye^x(x+y^2-1)}{(x+y^2)^2}$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{e^x(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$
3.31
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x} = -1$
$\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y} = 1$
3.32
$\frac{\partial f(2,3)}{\partial x} = \frac{1}{2}$
$\frac{\partial f(2,3)}{\partial y} = \frac{11}{6}$
3.33
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = 2$
$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 1$
3.34
$\frac{\partial f(2,-1)}{\partial x} = -\frac{1}{2e^2}$
$\frac{\partial f(2,-1)}{\partial y} = \frac{1}{e^2}$
3.35
$\frac{\partial f(-1,-1)}{\partial x} = -\frac{1}{2}$
$\frac{\partial f(-1,-1)}{\partial y} = -\frac{3}{2}$
3.36
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{6x}{y}$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 10x - \frac{6x^3}{y^4}$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = 10y + \frac{6x^2}{y^3}$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = 10y + \frac{6x^2}{y^3}$
3.37
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -y^2\cos xy$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -x^2\cos xy$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = -\sin xy - xy\cos xy$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = -\sin xy - xy\cos xy$

3.38
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(y \ln x + 1)$
3.39
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 300(5x-y)^2$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 12(5x-y)^2$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -60(5x-y)^2$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = -60(5x-y)^2$
3.40
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(y-x)^3}$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(y-x)^3}$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{(y-x)^3}$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{-2xy}{(y-x)^3}$
3.41
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{2y}{x^3} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2x$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2y + \frac{1}{(x)^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 2y + \frac{1}{(x)^2}$ $\quad H_f[1,2] = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
3.42
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -y^2 e^{-xy}$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -x^2 e^{-xy}$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = (xy-1)e^{-xy}$ $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = (xy-1)e^{-xy}$ $\quad H_f[-1,0] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
3.43
$\mathbf{d}(x,y)f = 5x^4y^3\mathbf{d}x + 3x^5y^2\mathbf{d}y$ $\quad \mathbf{d}f(-1,1) = 5\mathbf{d}x - 3\mathbf{d}y$
$\mathbf{d}^2 f(x,y) = 20x^3y^3\mathbf{d}x^2 + 30x^4y^2\mathbf{d}x\mathbf{d}y + 6x^5y\mathbf{d}y^2$
$\mathbf{d}^2 f(-1,1) = -20\mathbf{d}x^2 + 30\mathbf{d}x\mathbf{d}y - 6\mathbf{d}y^2$
3.44
$\mathbf{d}(x,y)f = \frac{3}{3x-7y^2}\mathbf{d}x - \frac{14y}{3x-7y^2}\mathbf{d}y$ $\quad \mathbf{d}f(1,-1) = -\frac{3}{4}\mathbf{d}x - \frac{7}{2}\mathbf{d}y$
$\mathbf{d}^2 f(x,y) = -\frac{9}{(3x-7y^2)^2}\mathbf{d}x^2 - \frac{84y}{(3x-7y^2)^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y + \frac{14(3x+7y)}{(3x-7y^2)^2}\mathbf{d}y^2$
$\mathbf{d}^2 f(1,-1) = -\frac{9}{16}\mathbf{d}x^2 + \frac{84}{16}\mathbf{d}x\mathbf{d}y - \frac{35}{4}\mathbf{d}y^2$
3.45
$\mathbf{d}(x,y)f(x,y) = (2xy^3 - 3x^2)\mathbf{d}x + (3x^2y^2 + 3)\mathbf{d}y$ $\quad \mathbf{d}f(1,2) = 13\mathbf{d}x + 15\mathbf{d}y$
$\mathbf{d}^2 f(x,y) = (2y^3 - 6x)\mathbf{d}x^2 + 12xy^2\mathbf{d}x\mathbf{d}y + (6x^2y)\mathbf{d}y^2$
$\mathbf{d}^2 f(1,2) = 10\mathbf{d}x^2 + 48\mathbf{d}x\mathbf{d}y + 12\mathbf{d}y^2$
3.46
$v = 1,975$, hodnota na kalkulačce $v = 1,9744$
3.47
$v = 1,09$, hodnota na kalkulačce $v = 1,0186$
3.48
$v = 38,4$, hodnota na kalkulačce $v = 38,93$
3.49
$v = 0,09$, hodnota na kalkulačce $v = 0,0858$
3.50
Lokální minimum v bodě $A = [1,-1]$, $f(A) = -1$
3.51
Sedlový bod $A = [1,-1]$
3.52
Lokální maximum v bodě $A = [0,0]$, $f(A) = 0$, lokální minima v bodech $B = [1,2]$, $f(B) = -5$ a $C = [-1,2]$, $f(C) = -5$, sedlové body $D = [-1,0]$, $E = [1,0]$, $F = [0,2]$.
3.53
Lokální minimum v bodě $A = [2,2]$, $f(A) = -8$, sedlový bod $B = [0,0]$.
3.54
Lokální minimum v bodě $A = [0,0]$, $f(A) = 0$, lokální maximum v bodě $B = [-\frac{5}{3}, 0]$, $f(B) = -\frac{5^4}{3^3}$, sedlové body $C = [-1,2]$ a $D = [-1,-2]$.
3.55
Funkce nemá žádné lokální extrémy.
3.56
Lokální minimum v bodě $A = [-2,0]$, $f(A) = -\frac{2}{e}$.

3.57
Lokální maximum v bodě $B = [4, 4]$, $f(B) = 15$.
3.58
Globální minimum v bodech A pro něž platí $4x - x^2 = 4y^2$, $f(A) = 0$, globální maximum v bodě $B = [2, 0]$, $f(B) = 2$.