Řešení vzorové písemné práce z předmětu Matematika I (KMI/PMATE)

Níže je uvedeno, jakým způsobem je možné řešit příklady uvedené ve vzorové písemce. V některých příkladech je samozřejmě možné použít i jiný postup než ten, který je zde uveden. Uvedené postupy použijte pro kontrolu toho, zda jsou vaše výpočty správné. V případě, že se nemůžete dobrat shodného výsledku, podívejte se, kde se vaše výpočty odlišují a pokuste se zdůvodnit uvedený postup.

1. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
   Řešení: Je

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{u} = u^{1/2}, \qquad \text{kde } u = 1 - x^2 \\ f'(x) &= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

---

2. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \cos(5 - 3x)\,\mathrm{d}x$
   Řešení: Je

$$\int \cos(5-3x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(5-3x)\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \cos(5-3x)(-3)\mathrm{d}x =$$
$$= \left|\begin{array}{c} 5-3x = t \\ -3\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = -\frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\sin t = -\frac{1}{3}\sin(5-3x) + C$$

---

3. Vypočtěte obecné řešení soustavy rovnic (zapsané v maticovém tvaru)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & -7 \end{array}\right)$$

   Řešení: Je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 10 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 22 & -50 \\ 0 & 0 & -2 & 22 & -50 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 22 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \div(-2) \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 25 \end{array}\right)$$

   Z posledního řádku získáme rovnici $x_3 - 11x_4 = 25$. Tím jsme dostali jednu rovnici o dvou neznámých. Víme, že taková rovnice má nekonečně mnoho řešení a ta vyjádříme pomocí parametru t, který představuje libovolné reálné číslo (zapisujeme výrazem $t \in \mathbb{R}$). Položíme $x_4 = t$, potom je $x_3 - 11t = 25$, tedy $x_3 = 25 + 11t$.

Z druhého řádku dostaneme rovnici $x_2 + x_3 - 3x_4 = 10$. Po dosazení hodnot x_3 a x_4 přejde tato rovnice do tvaru $x_2 + (25 + 11t) - 3t = 10$. Je tedy $x_2 = -15 - 8t$.

Z prvního řádku vyplývá rovnice $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -3$. Dosazením známých hodnot x_2, x_3 a x_4 dostaneme rovnici $x_1 + 2(-15 - 8t) + (25 + 11t) + 3t = -3$, je tedy

$$x_1 - 30 - 16t + 25 + 11t + 3t = -3, \text{ resp. } x_1 = 2 + 2t.$$

Řešení soustavy rovnic tak můžeme zapsat ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 + 2t, -15 - 8t, 25 + 11t, t)_{t\in\mathbb{R}} = (2, -15, 25, 0) + t(2, -8, 11, 1)_{t\in\mathbb{R}}$$

---

4. Vypočtěte lokální extrémy funkce $\dfrac{1}{1 + x^2}$.
Řešení: Lokální extrémy funkce $f(x)$ nalezneme pomocí nulových bodů první derivace funkce $f(x)$. Je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{u} = u^{-1} \qquad \text{kde } u = 1 + x^2 \\ f'(x) &= (-1)u^{-2}u' = -\frac{u'}{u^2} \\ &= -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

Nalezneme nulové body funkce $f'(x)$. Je

$$\begin{aligned} -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} &= 0 \qquad | \cdot (1 + x^2)^2 \\ -2x &= 0 \qquad | \div (-2) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Jediným nulovým bodem funkce $f'(x)$ je $x = 0$. Funkce $f'(x)$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, nemůže se tedy stát, aby funkce měla lokální extrém ještě v nějakém dalším bodě. (Funkce může mít lokální extrém pouze v těch bodech, ve kterých je první derivace rovna nule, nebo ve kterých není definována.) Z druhé derivace funkce $f(x)$ zjistíme, zda se skutečně jedná o lokální extrém, popřípadě o jaký. Je

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(1 + x^2)^2 - 2x \cdot 2(1 + x^2)2x}{(1 + x^2)^4} = -\frac{(1 + x^2)\left[2(1 + x^2) - 8x^2\right]}{(1 + x^2)^4} = -\frac{2 - 6x^2}{(1 + x^2)^3} \\ f''(0) &= -\frac{2 - 6 \cdot 0^2}{(1 + 0^2)^3} = -2 \end{aligned}$$

Druhá derivace funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$ je záporná, funkce $f(x)$ nabývá v bodě $x = 0$ své lokální maximum.

---

5. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 3x + 5 \\ g(x) &= x^2 + x + 9. \end{aligned}$$

Řešení: Obě uvedené funkce jsou kvadratické, jejich grafy proto budou jisté paraboly. Nejprve vypočítáme průsečíky obou parabol. V těchto průsečících mají obě funkce stejnou funkční hodnotu, hledáme tedy takové body x, ve kterých se funkční hodnoty obou funkcí rovnají. Tím dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x + 5 &= x^2 + x + 9 \\ 2x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti je zřejmé, že kořeny této kvadratické rovnice jsou $x_1 = -2$ a $x_2 = 1$. Tyto kořeny je samozřejmě možné počítat i jiným způsobem, např. doplněním na čtverec, resp. pomocí diskriminantu. Vypočtené kořeny se stanou mezemi určitého integrálu, s jehož pomocí vypočteme obsah zadané plochy. Integrandem bude rozdíl obou funkcí. Dosazením bodu z intervalu $(-2, 1)$ zjistíme, která z uvedených funkcí má v tomto intervalu větší funkční hodnoty. Vybereme např. bod $x = 0$. Je $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 5 = 5$, $g(0) = 0^2 + 0 + 9 = 9$. Pro všechna $x \in (-2, 1)$ je $g(x) > f(x)$, proto bude integrandem funkce $g(x) - f(x)$. Je

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{1} x^2 + x + 9 - (3x^2 + 3x + 5)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} -2x^2 - 2x + 4\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_{-2}^{1} \\ &= \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} - 1^2 + 4 \cdot 1\right) - \left(-\frac{2(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 4(-2)\right) \\ &= -\frac{2}{3} - 1 + 4 - \left(\frac{16}{3} - 4 - 8\right) = 9 \end{aligned}$$

Obsah zadané plochy P činí $S(P) = 9\,\mathrm{j}^2$.

---

6. Firma vyrábí a prodává x ks výrobků týdně. Týdenní náklady firmy na výrobu jsou popsány funkcí

$$C(x) = 2\,500 + 2x.$$

Poptávka po výrobcích firmy v závislosti na ceně P je dána rovnicí poptávky ve tvaru

$$P = 30 - \frac{x}{1\,000}.$$

Určete, za jakou cenu má firma zboží prodávat, aby dosáhla na maximální možný zisk.

Řešení: Víme, že zisk Z firmy je dán rozdílem obratu (příjmů) a nákladů firmy, přičemž příjmy $R(x)$ firmy jsou dány vzorcem $R(x) = x \cdot P(x)$. Je tedy

$$\begin{aligned} Z(x) &= x \cdot P(x) - C(x) \\ &= x\left(30 - \frac{x}{1\,000}\right) - (2\,500 + 2x) \\ &= -\frac{x^2}{1\,000} + 28x - 2\,500 \end{aligned}$$

Nyní budeme hledat lokální maximum funkce $Z(x)$, tedy budeme zjišťovat, pro jakou hodnotu x je hodnota $Z(x)$ nejvyšší. Je

$$\begin{aligned} Z'(x) &= -\frac{2x}{1\,000} + 28 \\ 0 &= -\frac{2x}{1\,000} + 28 \\ x &= 14\,000 \\ Z''(x) &= -\frac{2}{1\,000} \\ Z''(14\,000) &= -\frac{2}{1\,000} \end{aligned}$$

Lokální extrém funkce $Z(x)$ nastává v bodě $x = 14\,000$, protože druhá derivace funkce $Z(x)$ v tomto bodě je záporná, jde o lokální maximum funkce. V úloze nejsou uvedeny žádné omezující podmínky, jde proto i o globální maximum funkce.

Nyní víme, že firma dosáhne na maximální zisk tehdy, bude-li prodávat týdně 14 000 kusů výrobků. Určíme, při jaké ceně dojde k této poptávce. Dosadíme do rovnice poptávky. Je

$$\begin{aligned} P(x) &= 30 - \frac{x}{1\,000} \\ P(14\,000) &= 30 - \frac{14\,000}{1\,000} = 30 - 14 = 16 \end{aligned}$$

Firma by měla prodávat své zboží za 16 Kč.

---

7. Firma vyrábí tři druhy výrobků, označme je postupně písmeny A, B, C. K výrobě používá tři různé suroviny, označme je postupně písmeny X, Y, Z. Při výrobě jednoho kusu A spotřebuje 2 ks X a 2 ks Y. Při výrobě jednoho kusu B spotřebuje 3 ks X a 1 ks Z a při výrobě jednoho kusu C spotřebuje 3 ks Y a 1 ks Z. Na skladě je 800 ks suroviny X, 650 ks suroviny Y a 350 ks suroviny Z. Jaké množství výrobků A, B, C má firma vyrobit, aby spotřebovala všechny suroviny na skladě?

Řešení: Označme si počty vyrobených kusů pomocí neznámých. Je x_1 počet vyrobených kusů A, x_2 počet vyrobených kusů B, x_3 počet vyrobených kusů C. Vyrobíme-li x_1 kusů výrobku A, potom spotřebujeme celkem $2x_1$ kusů suroviny X. Vyrobíme-li x_2 kusů výrobku B, potom spotřebujeme celkem $3x_1$ kusů suroviny X. Při výrobě x_3 kusů výrobku C nespotřebováváme žádnou surovinu X. Celková spotřeba suroviny X při výrobě je tedy $2x_1 + 3x_2$. Víme, že k dispozici je 800 kusů, musí proto platit rovnost

$$2x_1 + 3x_2 = 800.$$

Analogicky lze určit spotřebu suroviny Y, přitom získáme rovnici

$$2x_1 + 3x_3 = 650,$$

a spotřebu suroviny Z, která vede na rovnici

$$x_2 + x_3 = 350.$$

Všechny tři rovnice musí platit současně, dostáváme proto soustavu rovnic (v maticovém tvaru)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 800 \\ 2 & 0 & 3 & 650 \\ 0 & 1 & 1 & 350 \end{array}\right)$$

Její řešení určíme pomocí eliminační metody. Je

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 800 \\ 2 & 0 & 3 & 650 \\ 0 & 1 & 1 & 350 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 800 \\ 0 & -3 & 3 & -150 \\ 0 & 1 & 1 & 350 \end{pmatrix} \mid \div(-3) \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 50 \\ 0 & 1 & 1 & 350 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 2 & 300 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 2 & 300 \end{array}\right)$$

Z posledního řádku matice plyne rovnice $2x_3 = 300$. Je tedy $x_3 = 150$ kusů. Z prostředního řádku matice dostaneme rovnici $x_2 - x_3 = 50$. Dosazením známé hodnoty x_3 získáme rovnici $x_2 - 150 = 50$, je tedy $x_2 = 200$ kusů. Z prvního řádku v matici plyne rovnice $2x_1 + 3x_2 = 800$, čili po dosazení x_2 máme rovnici $2x_1 + 600 = 800$, je tedy $x_1 = 100$ kusů. Firma musí vyrobit 100 kusů výrobku A, 200 kusů výrobku B, 150 kusů výrobku C.

---

8. Nakreslete graf funkce $f(x)$, která je rostoucí pro všechna $x \in \langle 5,\ 15)$ a platí $\lim\limits_{x \to 15} f(x) = \infty$.

Řešení: Jedno z (nekonečně mnoha) možných řešení vypadá takto: